

ÉLECTROSTATIQUE et ÉLECTROCINÉTIQUE

Rappel de cours et exercices corrigés de Physique
50 % cours + 50 % exos

Preview from Notesale.co.uk
Page 4 of 266

Émile Amzallag
Josep Cipriani
Josseline Ben Aïm
Norbert Piccioli

Maîtres de conférences à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

2^e édition



5.6. Calcul de forces électrostatiques à partir de l'énergie	123
5.7. Exemples d'application	124
Exercices	129
Corrigés	133

6 LE COURANT ÉLECTRIQUE DANS LES MILIEUX CONDUCTEURS 148

6.1. Les charges mobiles	148
6.2. Le courant électrique	149
6.3. Équation de continuité	153
6.4. Conductivité électrique : loi d'Ohm locale	156
6.5. Résistance électrique :	
loi d'Ohm macroscopique	159
6.6. Association de résistances	160
6.7. Rôle du générateur : force électromotrice	161
6.8. Les lois de Kirchhoff	163
6.9. Aspect énergétique : loi de Joule	165
Exercices	167
Corrigés	172

7 RÉSEAUX ÉLECTRODYNAMIQUES. RÉGIMES VARIABLES 183

7.1. Dipôles électrodynamiques	183
7.2. Réponse d'un circuit à un échelon de tension	185
7.3 Circuits en régime sinusoïdal	192
Exercices	202
Corrigés	206

PROBLÈMES D'EXAMEN CORRIGÉS 221

INDEX 252

Cette relation permet de définir la coordonnée du rotationnel dans une direction quelconque de vecteur unitaire \vec{n} .

On en déduit :

$$\mathcal{C} = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{M} = \iint_{(S)} (\text{rot} \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

Cette formule, dite de Stokes (voir paragraphe **1.8**), facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé.

1.6.4 Laplacien

L'opérateur Laplacien (noté Δ) est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Il peut s'appliquer à une fonction scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou à un vecteur :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V} &= \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \\ &= \vec{e}_x \Delta V_x + \vec{e}_y \Delta V_y + \vec{e}_z \Delta V_z \end{aligned}$$

L'intérêt de tous ces opérateurs vectoriels est d'une part, de permettre une écriture concise des équations dites « locales » (exemple : équations de Maxwell), et d'autre part, de faciliter les calculs, grâce aux relations vectorielles qui existent entre eux, et aux transformations intégrales qu'ils permettent d'effectuer.



1.7. RELATIONS VECTORIELLES

Produit mixte : $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$ (1.12)

Double produit vectoriel : $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ (1.13)

EXERCICES

1.1. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$$

Calculer la circulation de \vec{A} entre les points $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$ le long des chemins suivants :

- a) le segment de droite joignant ces deux points,
- b) les segments de droite allant de $(0, 0, 0)$ à $(1, 0, 0)$ puis de $(1, 0, 0)$ à $(1, 1, 0)$ et enfin de $(1, 1, 0)$ jusqu'à $(1, 1, 1)$.

Le champ vectoriel est-il un gradient ?

1.2. Soit le champ vectoriel :

$$\vec{V}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Calculer la circulation de \vec{V} le long de :

- a) la spirale logarithmique d'équation polaire $r = ae^{k\theta}$, entre θ_1 et θ_2 .
- b) la cardioïde $r = a(1 + \cos\theta)$, entre 0 et π .

Preview from Notesale.co.uk
Page 26 of 266

1.3. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$

Montrer que ce champ est un gradient, et déterminer la fonction scalaire φ dont il dérive par la relation $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$.

1.4. Un champ de vecteur \vec{E} , dans l'espace orthonormé $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, est caractérisé par ses composantes :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ f(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{où } f \text{ ne dépend que de } x \text{ et } y.$$

On en déduit finalement :

$$\varphi = x^2 - yx + y^2 - 2z^2 + C$$

1.4. Le champ \vec{E} est défini par :

$$\vec{E} = yz\vec{e}_x + zx\vec{e}_y + f(x,y)\vec{e}_z$$

1) Pour que \vec{E} soit un gradient, il faut que les dérivées croisées de ses composantes soient égales deux à deux, soit :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad z = z \text{ qui est vérifié identiquement}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y \end{aligned} \right\} \text{conditions nécessaires}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \Longrightarrow \quad f = xy + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{dg}{dx} = y \quad \Longrightarrow \quad \frac{dg}{dx} = 0 \Longrightarrow g = C$$

La fonction f doit donc être de la forme :

$$f = xy + C$$

2) Pour déterminer le potentiel V , on écrit que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$. D'où :

$$E_x = yz = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad V = -xyz + u(y, z)$$

$$E_y = xz = -\frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad u = v(z)$$

$$E_z = xy + C = -\frac{\partial V}{\partial z} = xy - \frac{\partial u}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad v = -Cz + \text{cte}$$

On en déduit :

$$V = -xyz - Cz + \text{cte}$$

3) Circulation entre les points $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$

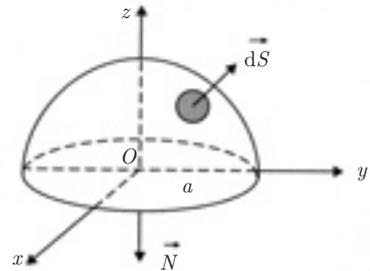
D'où :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iiint_{\tau} r^4 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^a r^4 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{a^5}{5} \times 1 \times 2\pi = \frac{2\pi a^5}{5} \end{aligned}$$

1.8. 1) $V = 2z\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2xy\vec{e}_z$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Soit S la surface totale de la demi-sphère (hémisphère + base) et τ le volume de cette demi-sphère.



Le théorème de la divergence permet d'écrire :

$$\Phi_S = \oiint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{N} \, dS = \iiint_{(\tau)} \operatorname{div} \vec{V} \, d\tau = 0$$

Φ (sortant) + Φ (sortant) = 0 \implies Φ (sortant) = Φ (entrant) = 0

hémisphère disque hémisphère disque

2) On en déduit :

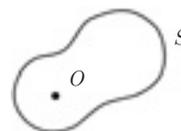
Preview from Notesale.co.uk
Page 34 of 266

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{hémisphère}} &= \iint_{\text{hémisphère}} 2xy \, dS \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ dS = r \, dr \, d\theta \end{cases} \\ \Phi &= \iint_{\text{disque}} 2r^3 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, dr \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr = 0 \end{aligned}$$

1.9. $\vec{V} = K \frac{\vec{r}}{r^3} = K \frac{\vec{e}_r}{r^2}$

a) Si la surface fermée contient l'origine, on ne peut pas appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky car $\operatorname{div} \vec{V}$ n'est pas définie en O. Il faut faire un calcul direct :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{N} \, dS = K \iint_{(S)} \frac{dS}{r^2} \vec{N} \cdot \vec{e}_r \\ &= K \int_{(S)} d\Omega = 4\pi k \end{aligned}$$



- **les distributions continues de charge** : hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale dq , à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution.

On définit ainsi les densités :

- linéique sur un fil : $\lambda = \frac{dq}{d\ell}$ [C · m⁻¹]
- surfacique (ou superficielle) sur une surface : $\sigma = \frac{dq}{dS}$ [C · m⁻²]
- volumique dans un volume : $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ [C · m⁻³]

auxquelles correspondent respectivement les charges infinitésimales λdl , σdS et $\rho d\tau$.

2.2. LOI DE COULOMB

Soit deux charges q et q' placées en M et M' et distantes de r . Ces charges peuvent être positives ou négatives, mais dans le cas de la figure, nous supposons qu'elles sont de même signe.

La loi de Coulomb permet de déterminer la force $\vec{F}_{M'}$ exercée par q sur q' , ou encore la force \vec{F}_M exercée par q' sur q , ces deux forces étant égales et opposées conformément au principe de l'action et la réaction.



Cette loi s'écrit :

$$\vec{F}_{M'} = K \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_{MM'} \quad (2.1)$$

ou $\vec{F}_M = K \frac{qq'}{r^2} \vec{u}_{M'M}$ avec $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ S.I.

$\vec{u}_{MM'}$ est le vecteur unitaire porté par le support de MM' , orienté de M vers M' , (on dit dans le sens qui va de la cause vers l'effet).



La force est répulsive si les charges sont de même signe, elle est attractive si elles sont de signes contraires.

Cette loi traduit l'interaction entre les deux objets q et q' . Les notions de champ et de potentiel permettent de préciser les propriétés relatives à un seul objet.

Les surfaces équipotentielles $V = \text{cte}$ sont des sphères centrées en M . En effet, sur ces surfaces, on a :

$$dV = \left(\vec{\text{grad}} V \right) \cdot d\vec{\ell} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \implies d\vec{\ell} \perp \vec{E}$$

2.3.3 Cas d'un système de charges

Lorsque n charges ponctuelles existent simultanément en des points M_1, M_2, \dots, M_n , le principe de superposition permet d'écrire :

– pour le champ résultant en un point M (avec $r_i = M_i M \neq 0$) :

$$\vec{E}_M = K \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{M_i M} \quad (2.5)$$

– et pour le potentiel résultant :

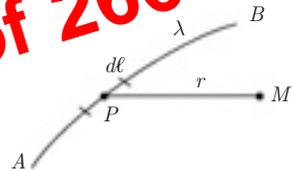
$$V_M = K \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (2.6)$$

Dans le cas de distributions continues de charge, on aura de même :

– pour un fil chargé uniformément :

$$\vec{E}_M = K \int_{AB} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \vec{u}_{PM}$$

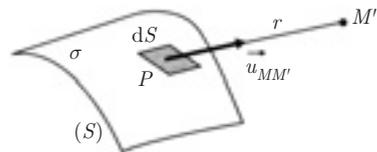
$$V_M = K \int_{AB} \frac{\lambda d\ell}{r}$$



– pour une surface chargée uniformément :

$$\vec{E}_M = K \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}_{MM'}$$

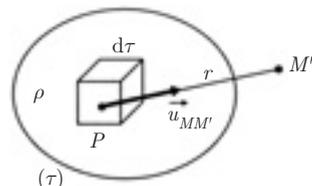
$$V_M = K \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{r}$$



– et pour un volume chargé uniformément :

$$\vec{E}_M = K \iiint_{(\tau)} \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u}_{MM'}$$

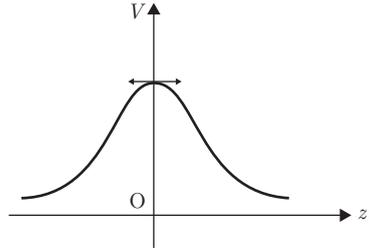
$$V_M = K \iiint_{(\tau)} \frac{\rho d\tau}{r}$$



Preview from Notesale.co.uk
Page 39 of 266

$$V = \frac{K \lambda}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi R} d\ell$$

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0(R^2 + z^2)^{1/2}}$$



3) Calcul du champ à partir du potentiel

$$V = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0(R^2 + z^2)^{1/2}} + \text{Cte} \quad \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

On a successivement :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

Preview from Notesale.co.uk
page 44 of 266

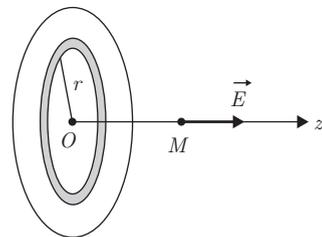
Exemple 3. Champ créé par un disque de rayon R portant une densité de charge surfacique uniforme $\sigma = \frac{dq}{dS}$, en un point M de son axe Oz.

On suppose $\sigma > 0$. Calculer le potentiel et en déduire le champ.

On peut considérer le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon r et d'épaisseur dr , quand r varie de 0 à R .

De la sorte, on peut appliquer les résultats de l'exemple précédent.

Pour trouver la correspondance des densités de charge, on écrit que la charge $2\pi r \lambda$ portée par le fil de l'exemple précédent est maintenant portée par le fil de même rayon mais d'épaisseur dr . On a donc la correspondance :

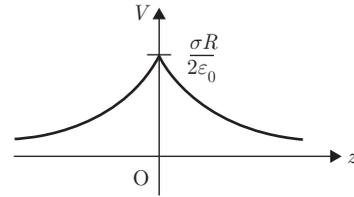


$$2\pi r \lambda \mapsto 2\pi r dr \sigma \quad \text{et} \quad \lambda \mapsto \sigma dr$$

1) Calcul du potentiel

$$V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{1/2}} \text{ est à remplacer par } dV = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0(r^2 + z^2)^{1/2}}$$

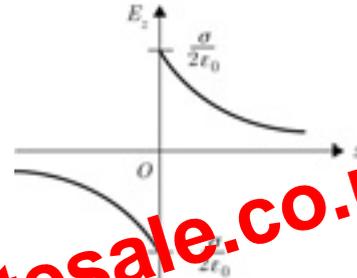
$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [(r^2 + z^2)^{1/2}]_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [(R^2 + z^2)^{1/2} - |z|] \end{aligned}$$



2) Calcul du champ

En faisant le même calcul directement, ou en passant par $\vec{E} = -\text{grad } V$, on trouve :

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \vec{e}_z$$

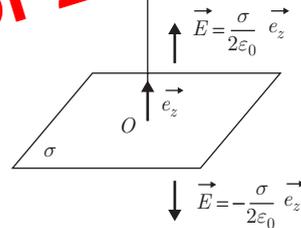


Remarque :

- On peut noter la discontinuité du champ \vec{E} au passage par le point $O(z=0)$.
- Le champ créé par un plan portant une densité de charge σ peut se déduire du résultat relatif au disque, en faisant tendre R vers l'infini.

On trouve :
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$$

- Le calcul direct du champ \vec{E} créé par un disque chargé superficiellement, en un point M de son axe, sera proposé comme exercice.



Exemple 4. Potentiel créé par une sphère de centre O et de rayon R , chargée uniformément, en un point M extérieur à la sphère.

1) Sphère chargée en surface

Soit σ la charge surfacique.

positives. Le moment dipolaire moléculaire aura tendance à s'aligner avec le champ \vec{E} . On dit que la molécule (ou la substance) se polarise.

• *Énergie potentielle du dipôle dans le champ \vec{E} :*

$$E_p = qV_B - qV_A = q(V_B - V_A)$$

Or le champ appliqué \vec{E} est lié à $V_B - V_A$ par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x} \vec{e}_x = -\frac{V_B - V_A}{a \cos \theta} \vec{e}_x$$

On en déduit :

$$E_p = -aqE \cos \theta$$

soit
$$E_p = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

L'énergie potentielle est minimum lorsque $\theta = 0$, indiquant que le dipôle est en équilibre stable quand il est orienté parallèlement au champ appliqué.

b) Cas d'un champ non uniforme

Dans ce cas, les forces \vec{F}_B et \vec{F}_A ne sont plus égales et opposées. Il en résulte une force qui va déplacer le dipôle dans son ensemble. On aura donc un mouvement de translation de centre de masse O du dipôle, en plus du mouvement de rotation autour de O .

La force résultante est liée à l'énergie potentielle par :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

On aura donc :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

On a de même :

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= 2E_2 \cos \frac{\pi}{4} \vec{e}_y = 2K \frac{4q}{a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \\ &= 4K \frac{q}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y \text{ soit :}\end{aligned}$$

$$\vec{E} = \frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2} \vec{e}_y$$

Le champ résultant \vec{E} est donc :

- dirigé suivant l'axe $y'oy$;
- dans le sens positif de l'axe $y'oy$;
- de norme $E = \frac{2Kq}{a^2} \sqrt{2}$.

A.N. : $E = 9 \cdot 10^9 \times 10^{-8} \times 2\sqrt{2} = 254,6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

2) Détermination du potentiel V en O :

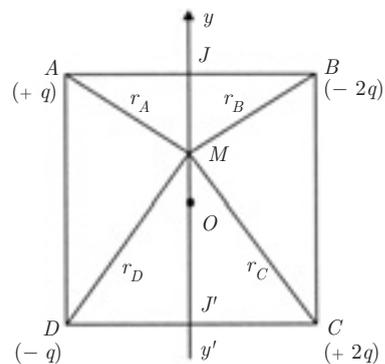
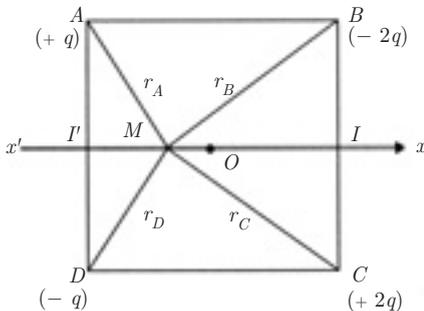
Soient V_1, V_2, V_3 et V_4 les potentiels créés par les charges q_1, q_2, q_3 et q_4 en O .

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{2Kq}{a\sqrt{2}} [1 + 2 + 2 + 1]$$

soit :

$$V = 0$$

3) Variation du potentiel sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$



$$\vec{E}'_M = \frac{4Kq}{\Omega M^2} \varepsilon_1 \vec{e}_y$$

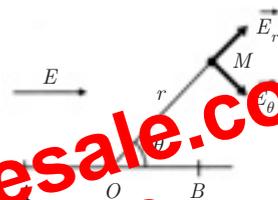
A.N. : $\vec{E}'_M = 3,18 \cdot 10^6 \text{ Vm}^{-1}$

3) À la distance $\Omega M = 20L$, l'erreur relative effectuée en utilisant l'approximation dipolaire est :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_M - E'_M}{E_M} \simeq \frac{3\varepsilon_2^2}{2 \times 2\varepsilon_1} = 0,056$$

L'approximation dipolaire sera meilleure pour une distance ΩM bien supérieure à $20L$.

2.6. 1) Le champ électrique \vec{E} étant uniforme et parallèle à AB , les surfaces équipotentielles $V = \text{cte}$ sont les plans perpendiculaires à \vec{E} , donc à AB (voir paragraphe 3).



2) $-dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$
 $\vec{E} = E \cos \theta \vec{u}_r - E \sin \theta \vec{u}_\theta$

et $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$

$$-\int_{V(O)}^{V(M)} dV = \int_0^r E \cos \theta dr$$

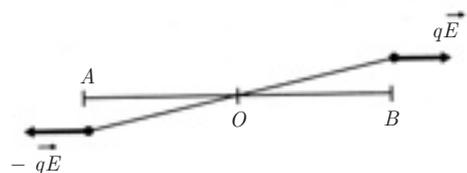
D'où $V(O) - V(M) = +Er \cos \theta$

$$V(M) = V(O) - Er \cos \theta$$

3) a) Le dipôle est soumis à un couple de forces de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = q\vec{AB} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{car } \vec{AB} // \vec{E})$$

Le dipôle est donc en équilibre ; l'équilibre est stable car, lorsqu'on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de forces $(q\vec{E}, -q\vec{E})$ tend à l'y ramener.



Preview from Notesale.co.uk
Page 62 of 266

2) a) Énergie potentielle du dipôle placé en M :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -(p\vec{u}_r) \cdot \left(2Kp_A \frac{\vec{u}_r}{r^3} \right) = -\frac{2Kp_A p}{r^3}$$

b) Force à laquelle est soumis le dipôle placé en M :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r = -6K \frac{p_A p}{r^4} \vec{u}_r \quad (\text{attractive})$$

3) a) Énergie potentielle du dipôle induit.

Comme $\vec{p} = \beta \vec{E}$, on a :

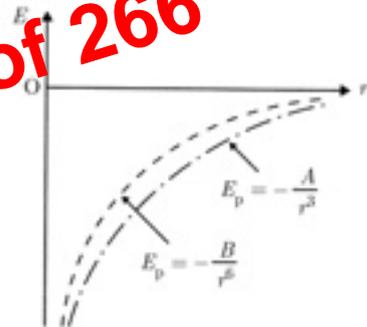
$$E_p = -\vec{p} \vec{E} = -\beta E^2 = -\frac{\beta K^2 4 p_A^2}{r^6} = -\frac{4\beta K^2 p_A^2}{r^6}$$

b) Force à laquelle est soumis le dipôle induit :

$$\vec{F} = -\beta K^2 \frac{24 p_A^2}{r^7} \vec{u}_r \quad (\text{attractive})$$

4) L'allure de la courbe de l'énergie potentielle qui est en $-\frac{1}{r^3}$ (2^e question) ou en $-\frac{1}{r^6}$ (3^e question) montre que dans les deux cas la position d'équilibre est $r = \infty$; le dipôle induit est attiré par le premier dipôle.

Pour rendre compte de la stabilité du système de molécules, il faut introduire, dans l'énergie potentielle, un terme de répulsion à courte distance.



Preview from Notesale.co.uk
Page 64 of 266

3.5. ÉQUATIONS DE POISSON ET DE LAPLACE

En présence d'une densité volumique de charge, on peut écrire les deux lois locales :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \\ \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \implies \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Or $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$. On en déduit :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0} \quad (\text{équation de Poisson}) \quad (3.4)$$

et dans le vide :

$$\boxed{\Delta V = 0} \quad (\text{équation de Laplace}) \quad (3.5)$$

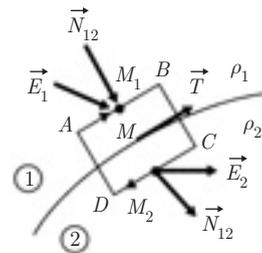
3.6. CONDITIONS DE PASSAGE À L'INTERFACE ENTRE DEUX DISTRIBUTIONS DE CHARGES DIFFÉRENTES

Soit les points M_1 et M_2 infiniment voisins du point M pris sur l'interface séparant les deux distributions.

En ces points, on a respectivement :

$$\vec{E}_1 = E_{1T} \vec{T} + E_{1N} \vec{N}_{12}$$

$$\vec{E}_2 = E_{2T} \vec{T} + E_{2N} \vec{N}_{12}$$



où \vec{T} est le vecteur unitaire porté par la tangente en M à l'interface, et \vec{N}_{12} est le vecteur unitaire normal à l'interface, orienté du milieu (1) vers le milieu (2).

On veut exprimer que la circulation de \vec{E} le long du contour fermé élémentaire (C) représenté sur la figure est nulle. En supposant que la contribution des côtés AD et BC est négligeable devant celle des côtés AB et DC , on peut écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 = E_{1T} AB - E_{2T} CD \quad \text{avec} \quad AB = CD$$

on en déduit :

$$\vec{E}_{1T} = \vec{E}_{2T} \quad (3.6)$$

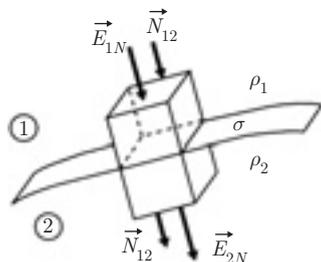
La composante tangentielle de \vec{E} se conserve, malgré la discontinuité de ρ sur l'interface.



Supposons maintenant que l'interface porte une charge surfacique σ .

On considère le parallélépipède élémentaire représenté sur la figure, et on cherche à déterminer le flux de \vec{E} sortant de ce parallélépipède.

La contribution des densités volumiques ρ_1 et ρ_2 à ce flux étant un infiniment petit du 3^e ordre comparée à la contribution de la densité surfacique σ qui est du 2^e ordre, on peut ignorer les charges volumiques et écrire :



$$\Phi = \int_{(S \text{ totale})} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E_{2N}S - E_{1N}S$$

Le théorème de Gauss s'exprime par :

$$\Phi = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

On en déduit :

$$\vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N}_{12} \quad (3.7)$$

La composante normale de \vec{E} subit une discontinuité proportionnelle à la densité surfacique σ . Elle ne se conserve que si l'interface ne porte pas de charges.



Le calcul du champ \vec{E} au voisinage d'un plan infini chargé, effectué dans l'exemple 3 du chapitre 2, a montré que ce champ est donné par $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{N}_{12}$ de part et d'autre du plan.

On retrouve bien la discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ en traversant le plan chargé.

D'où la variation de E en fonction de r représentée sur la figure.

3) Calcul du potentiel

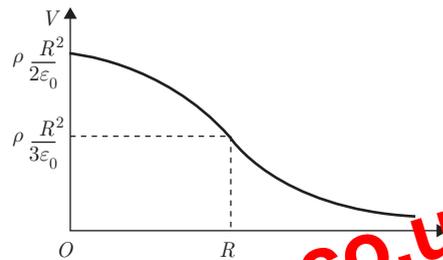
Le champ \vec{E} étant radial, $dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr} = -E dr$. À l'extérieur, on a :

$$V_{\text{ext}} = - \int E_{\text{ext}} dr = - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + C_1$$

Lorsque $r \rightarrow \infty$ $V \rightarrow 0 \implies C_1 = 0$.

À l'intérieur :

$$\begin{aligned} V_{\text{int}} &= - \int E_{\text{int}} dr \\ &= - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr \\ &= - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + C_2 \end{aligned}$$



La continuité de V à la surface de la sphère donne :

$$\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} = - \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + C_2 \implies C_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Finalement :

$$V_{\text{int}} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{r^2}{3R^2} \right]$$

Exemple 3. Application de l'équation de Poisson

Retrouver l'expression du potentiel $V(r)$ créé par une sphère chargée d'une densité volumique ρ en intégrant l'équation de Poisson.

L'équation locale de Poisson s'écrit :

$$\Delta V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Par suite de la symétrie sphérique, on a :

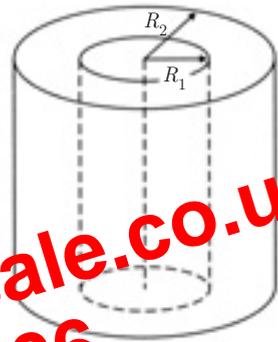
$$\Delta V = \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2}$$

- 3) À partir de l'expression de ce champ sur une sphère de centre O et de rayon r , déterminer la charge interne $Q(r)$ contenue dans cette sphère. En déduire la charge totale de la distribution.
- 4) Calculer la densité volumique de charge ρ , à la distance r , en précisant son signe.
- 5) Montrer qu'au point O , il existe une charge positive finie, dont on précisera la valeur en fonction des données. Quelle est alors l'expression du champ au voisinage de O ?
- 6) Comment peut-on finalement décrire la distribution de charge proposée ?

3.5. Exprimer le champ électrique créé en tout point de l'espace par une distribution volumique de charge $\rho(> 0)$ répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$),

- 1) en utilisant le théorème de Gauss,
 2) à partir de l'équation locale :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



3.6. Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge Q répartie uniformément avec une densité volumique $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$.

- 1) Exprimer le potentiel en tout point de l'espace en utilisant les équations locales de Laplace et de Poisson.
 2) En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$.
 3) Retrouver l'expression de $\vec{E}(r)$ en appliquant le théorème de Gauss.

CORRIGÉS

3.1. 1) Fil de longueur finie : non, on ne peut appliquer le théorème de Gauss.

2) Fil de longueur infinie : oui. Dans ce cas, la surface de Gauss est un cylindre ayant pour axe le fil. Soit h et r respectivement la hauteur et le rayon de ce cylindre, r étant

Les charges $\sigma_1 dS_1$ et $\sigma_2 dS_2$ qui se font face sur deux éléments de surface correspondants sont égales et opposées (théorème de Faraday).

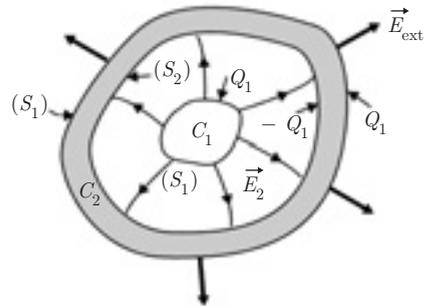
L'influence est dite partielle car seule une partie des lignes de champ issues de (C_1) aboutit à (C_2) .

4.5.2 Influence totale

Si l'un des deux corps (C_2 par exemple) entoure totalement l'autre, il y a correspondance totale entre les charges de la surface (S_1) de (C_1) et la surface interne (S_2) de (C_2) .

On peut alors écrire :

$$Q_1 = \int_{(S_1)} \sigma_1 dS_1 = - \int_{(S_2)} \sigma_2 dS_2$$



Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées.

On peut donc résumer la situation de la manière suivante :

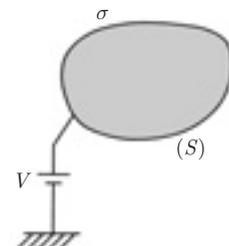
- dans la partie massive de (C_1) : $\vec{E}_1 = \vec{0}$,
- sur la surface de (C_1) : charge $Q_1 > 0$ créant \vec{E}_2 ,
- sur la surface interne de (C_2) : charge $-Q_1$,
- dans la partie massive de (C_2) : $\vec{E} = 0$,
- sur la surface externe de (C_2) : apparition de la charge $+Q_1$ pour assurer la neutralité de (C_2) (si l'on suppose (C_2) neutre au départ),
- à l'extérieur des deux conducteurs : le champ \vec{E}_{ext} est celui créé par la seule charge Q_1 portée par la surface externe de (C_2) .

4.6. CAPACITÉ D'UN CONDUCTEUR UNIQUE

Soit un conducteur porté au potentiel V . Il apparaît alors sur sa surface, une charge q définie par :

$$q = \iint_{(S)} \sigma dS$$

Si le potentiel devient V_1 , puis V_2 , puis V_3 , la charge devient q_1 , q_2 , q_3 . Les relations charge-



Comme la surface de la feuille métallique est une équipotentielle

$$\frac{Q}{C'} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \text{où} \quad V'_{M_1} - V'_{M_2} = 0 \quad C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{d_2}$$

Par conséquent, l'ensemble (P) + (M) est équivalent à deux condensateurs mis en parallèle.

On en déduit :

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d_1 + d_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d - e}$$

soit :

$$C' = \frac{\epsilon_0 S}{d \left(1 - \frac{e}{d}\right)} = \frac{C}{1 - \frac{e}{d}}$$

A.N. :

$$\frac{e}{d} = \frac{1}{2,5} = 0,4 \implies C' = \frac{C}{0,6} = 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

$$V'_A - V'_B = \frac{Q}{C} = \frac{C}{C'} (V_A - V_B)$$

A.N. :

$$V'_A - V'_B = 0,6 \times 500 = 300 \text{ V}$$

4.2. 1) On a successivement

$$C' = 4\pi\epsilon_0 R_1 \epsilon = \frac{R_1}{K} \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = K \frac{Q_1}{R_1}$$

A.N. :

$$C_1 = 10^{-11} \text{ F} = 10 \text{ pF} \quad \text{et} \quad V_1 = 10^3 \text{ V} = 1 \text{ kV}$$

2) La charge Q_1 va se répartir sur les deux sphères de façon qu'à l'équilibre le potentiel soit le même sur les deux sphères.

On a donc :

$$V'_1 = V'_2 \implies \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{R_1 + R_2}$$

avec la condition de conservation de la charge :

$$Q_1 = Q'_1 + Q'_2$$

Par conséquent :

$$Q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q_1 \quad \text{et} \quad Q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q_1$$

Preview from Notesale.co.uk
Page 12 of 266

5.2.2 Cas d'une distribution continue de charges

On peut étendre la sommation discontinue précédente à une sommation intégrale. En désignant par dq la charge élémentaire et par V le potentiel auquel est soumis cette charge, on obtient :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\text{espace chargé}} V dq \quad (5.3)$$

distribution linéaire : $dq = \lambda dl$ $E_p = \frac{1}{2} \int_L \lambda V dl$

distribution superficielle : $dq = \sigma dS$ $E_p = \frac{1}{2} \int_S \sigma V ds$

distribution volumique : $dq = \rho d\tau$ $E_p = \frac{1}{2} \int_\tau \rho V d\tau$

5.3. ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE EMMAGASINÉE DANS LES CONDUCTEURS CHARGÉS

5.3.1 Énergie d'un conducteur unique

Pour un conducteur de capacité C portant la charge q , la relation (5.3) s'intègre immédiatement, puisque le conducteur est équipotentiel ($V = \text{cte}$).

L'énergie emmagasinée s'écrit donc, compte tenu que $q = CV$:

$$E_p = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (5.4)$$

5.3.2 Énergie d'un système à n conducteurs

On a alors : $E_p = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 + \dots + \frac{1}{2} q_n V_n$

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (5.5)$$

où q_i est la charge portée par le conducteur i et V_i son potentiel.

Ce résultat, établi ici dans un cas particulier, est vrai dans le cas général : si un champ électrique est appliqué en un point quelconque de l'espace, on peut lui associer une densité volumique d'énergie donnée par :

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad (5.7)$$

5.6. CALCUL DE FORCES ÉLECTROSTATIQUES À PARTIR DE L'ÉNERGIE

Lorsqu'on cherche à calculer les forces électrostatiques à partir de l'énergie emmagasinée dans un système, deux cas peuvent se présenter :

- la charge reste constante,
- le potentiel reste constant.

5.6.1 Calcul de la force, à charge constante

C'est le cas d'un condensateur qui serait préalablement chargé, puis isolé et abandonné aux forces électrostatiques qu'il exerce entre les armatures.

À chaque travail élémentaire dW des forces électrostatiques correspond une variation dE_p de l'énergie emmagasinée. Le système étant isolé, la conservation de l'énergie implique que :

$$dW + dE_p = 0$$

Et comme $dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, on en déduit l'expression de la force électrostatique :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p \quad (\text{à charge constante}) \quad (5.8)$$

en tout point de la distribution de charge.

5.6.2 Calcul de la force, à potentiel constant

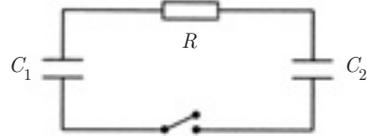
C'est le cas où le condensateur chargé n'est plus isolé, mais reste relié à une source en permanence.

Dans ce cas, à tout travail élémentaire dW des forces électrostatiques correspondent à la fois une variation dE_p de l'énergie emmagasinée, et une énergie dE_s dépensée par la source pour maintenir le potentiel constant.

5.5. 1) Un condensateur de capacité C_1 est chargé sous une différence de potentiel V_1 , puis isolé.

Donner les expressions de la charge Q_0 et de l'énergie W_0 emmagasinées dans le condensateur C_1 à la fin de l'opération.

2) On décharge le condensateur C_1 dans un condensateur C_2 , initialement neutre, à travers une résistance R . Calculer, à l'équilibre, en fonction de Q_0 , C_1 et C_2 :



a) les charges Q_1 et Q_2 prises par les deux condensateurs,

b) les différences de potentiel V'_1 et V'_2 aux bornes des deux condensateurs,

c) les énergies W_1 et W_2 emmagasinées dans les deux condensateurs.

3) a) Écrire la variation de q_1 en fonction du temps au cours de la décharge de C_1 dans le circuit.

b) En déduire l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans la résistance R , en fonction de Q_0 , C_1 et C_2 , pendant la décharge de C_1 .

c) Montrer que la variation d'énergie du système entre l'état initial et l'état final correspond à l'énergie dissipée par effet Joule.

5.6. A) L'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes d'une molécule diatomique d'iodure d'hydrogène (I_2) est représentée par une expression de la forme :

$$E_p(x) = \frac{a}{x^6} - \frac{b}{x^{12}} \quad (\text{potentiel de Lennard-Jones})$$

où x représente la distance séparant les deux atomes, et a et b sont deux constantes positives.

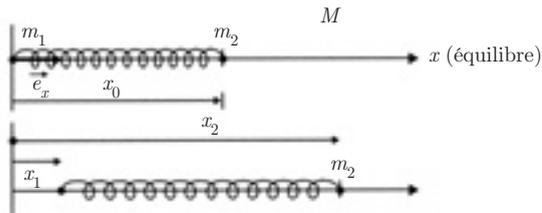
1) Tracer la courbe $E_p(x)$. Déterminer la valeur x_0 pour laquelle le système est en équilibre stable. Quelle est l'énergie potentielle $E_p(x_0)$ correspondante ?

2) Pour une molécule d'iodure d'hydrogène, l'énergie de dissociation est $E_D = 5 \cdot 10^{-19}$ joule et la distance $x_0 = 1,64 \text{ \AA}$.

– Quelle est la relation entre E_D et $E_p(x_0)$?

– Quelles sont les valeurs des constantes a et b ?

B) On considère maintenant que la liaison entre les deux atomes de masse m_1 (pour l'hydrogène) et m_2 (pour l'iode) est équivalente à un ressort de rappel k , dont la longueur au repos est égale à la longueur x_0 de la liaison à l'équilibre. Les déplacements respectifs de m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibre sont x_1 et $(x_2 - x_0)$.



1) Écrire les équations différentielles vérifiées par x_1 et x_2 . Déduire de ces deux équations l'équation différentielle vérifiée par la variable $x = x_2 - x_1$. On posera

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (\mu \text{ est la masse réduite de l'oscillateur}).$$

2) Déterminer la fréquence propre angulaire ω_0 de vibration de la molécule, c'est-à-dire la fréquence du mouvement relatif de la masse m_2 par rapport à la masse m_1 .

C) On revient à la molécule d'iodure d'hydrogène. En utilisant un développement limité au deuxième ordre de $E_p(x)$ au voisinage de $x = x_0$, montrer que la force de liaison est effectivement une force de rappel de la forme $F_x = -k(x - x_0)$. En déduire l'expression de k en fonction x_0 et E_D .

3) A.N. : Calculer :

- la constante k ,
- la pulsation ω_0 ,
- la fréquence ν_0 des oscillations.

On donne :

$$m_1 = m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_2 = m_I = 127m_1$$

Preview from Notesale.co.uk
Page 142 of 266

CORRIGÉS

5.1. 1) Par suite de la symétrie, le champ en tout point M est radial et ne dépend que de $r = HM$. On prend pour surface de Gauss une surface cylindrique de rayon r , de hauteur h et d'axe Δ passant par le point M où l'on veut calculer \vec{E} .

2) L'énergie potentielle du dipôle \vec{P}_2 dans le champ de \vec{P}_1 est :

$$E_p = -\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_1$$

(où \vec{E}_1 est le champ créé en M_3 par le dipôle \vec{P}_1).

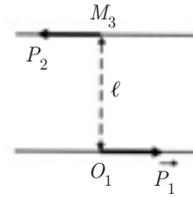
Or, d'après la 1^{re} question :

$$\vec{E}_{M_3} = \frac{K P_1}{r^3} \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad P_1 \vec{e}_\theta = -\vec{P}_1$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{K \vec{P}_1}{\ell^3}$$

$$E_p = -\vec{P}_2 \cdot \left(-\frac{K \vec{P}_1}{\ell^3} \right) = K \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{\ell^3}$$

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = \pi \quad \Rightarrow \quad E_p = -\frac{K P_1 P_2}{\ell^3}$$



3) a) Chaîne α



• Champ créé en M par le dipôle placé en N :

$$\vec{E}_N = \frac{2K \vec{P}}{d^3}$$

Champ créé en M par le dipôle placé en N' :

$$\vec{E}_{N'} = \frac{2K \vec{P}}{d^3}$$

Le champ \vec{E} créé par les molécules situées de part et d'autre de M est donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_N + \vec{E}_{N'} = \frac{2K \vec{P}}{d^3}$$

En groupant les dipôles deux par deux, on obtient pour le champ total en M :

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= \frac{4K \vec{P}}{d^3} + \frac{4K \vec{P}}{(2d)^3} + \frac{4K \vec{P}}{(3d)^3} + \dots \\ &= \frac{4K \vec{P}}{d^3} \left[1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right] = 4,8 \frac{K \vec{P}}{d^3} \end{aligned}$$

Preview from Notesale.co.uk
Page 147 of 266

ou encore, puisque $\rho = -ne$ où n est le nombre d'électrons par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron :

$$\boxed{\vec{j} = -ne \vec{v}} \quad (6.2)$$

6.2.2 L'intensité du courant électrique

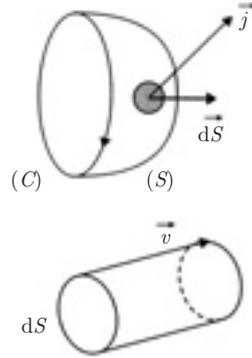
Soit Φ le flux de \vec{j} à travers une surface (S) orientée (s'appuyant sur un contour (C) orienté).

On a :

$$\Phi = \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Le flux élémentaire

$$\vec{j} \cdot \vec{dS} = \rho \vec{v} \cdot \vec{dS}$$



représente la charge contenue dans le volume du cylindre de longueur l s'appuyant sur dS ; c 'est aussi la charge qui traverse dS pendant t unité de temps. On peut donc écrire :

$$\boxed{\int_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \frac{dq}{dt}} \quad (6.3)$$

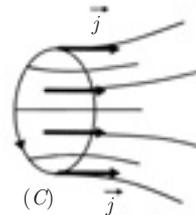
définissant ainsi l'intensité du courant qui traverse (S), laquelle s'exprime en ampère (A) : $1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$.

6.2.3 Lignes et tube de courant

Une ligne de courant est définie comme une ligne tangente en tout point au vecteur densité de courant \vec{j} .

Un tube de courant est formé par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé (C).

Ses génératrices sont donc tangentes à \vec{j} en tout point.



Vitesse d'agitation thermique

Dans ce mouvement tout à fait aléatoire, l'énergie moyenne d'un électron est de l'ordre de quelques eV . Si on identifie une énergie de $1 eV$ à l'énergie cinétique de l'électron, on trouve :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 0,6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

À cette vitesse ne correspond aucun courant électrique : l'agitation thermique étant désordonnée, la vitesse moyenne vectorielle correspondante est nulle.

Vitesse de dérive

Soit un fil de cuivre parcouru par un courant de densité 10 A/mm^2 . Pour le cuivre, on a :

$$\begin{cases} \text{masse atomique} & M = 63,6 \text{ g} \\ \text{masse volumique} & \mu = 8,8 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

En admettant que chaque atome libre en moyenne un électron libre, on peut trouver le nombre n d'électrons libres par m^3 , soit :

$$n = \frac{\mu \cdot \mathcal{N}}{M}$$

où \mathcal{N} est le nombre d'Avogadro.

On trouve

$$n = \frac{8,8 \cdot 10^3 \times 6,02 \cdot 10^{23}}{63,6 \cdot 10^{-3}} = 0,83 \cdot 10^{29} \text{ électrons} \cdot \text{m}^{-3}$$

On en déduit :

$$|\rho| = ne = 0,83 \times 10^{29} \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,33 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$v = \frac{j}{\rho} = \frac{10 \cdot 10^6}{1,33 \cdot 10^{10}} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

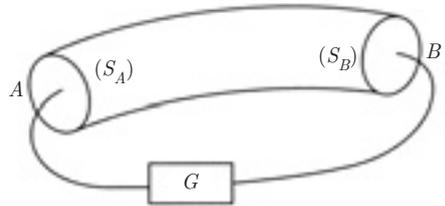
La vitesse de dérive des électrons est très faible devant la vitesse d'agitation thermique.

À l'inverse des conducteurs, les semi-conducteurs intrinsèques ont une conductivité σ qui augmente avec la température. À $T = 0$ °K, cette conductivité est nulle.

Dans le cas des matériaux supraconducteurs, la conductivité devient infinie à des températures très basses ($T \leq 7$ °K pour le plomb).

6.5. RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE : LOI D'OHM MACROSCOPIQUE

Considérons un conducteur limité par deux sections (S_A) et (S_B), portées respectivement aux potentiels V_A et V_B , grâce à un générateur (G) fermant le circuit.



On peut écrire :

$$V_A - V_B = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{AB} \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{\ell}$$

En régime stationnaire on peut définir la densité de courant en un point comme :

$$\vec{j} = \frac{I}{S} \vec{e}$$

où I est l'intensité du courant et S l'aire de la section droite du conducteur en ce point.

Or, donc :

$$V_A - V_B = \frac{I}{\sigma} \int_{AB} \frac{d\ell}{S}$$

En introduisant la résistance R du conducteur donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{AB} \frac{d\ell}{S}$$

qui s'exprime en ohms (Ω) on obtient :

$$\boxed{V_A - V_B = RI} \quad (6.14)$$

qui constitue la loi d'Ohm macroscopique.

■ Cas d'un conducteur cylindrique

Dans ce cas, la section est constante, on a : $R = \frac{1}{\sigma S} \int_{AB} d\ell = \frac{1}{\sigma S} \ell$

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma S}} \quad (6.15)$$

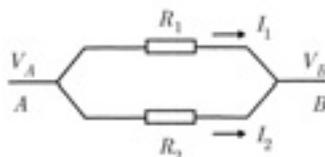
Résistance équivalente : $R = R_1 + R_2$

$$R = \sum_k R_k \tag{6.16}$$

6.6.2 Résistances en parallèle

On a :

$$V_A - V_B = R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ = R(I_1 + I_2)$$



Par conséquent : $\frac{R}{R_1} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$ et $\frac{R}{R_2} = \frac{I_2}{I_1 + I_2}$

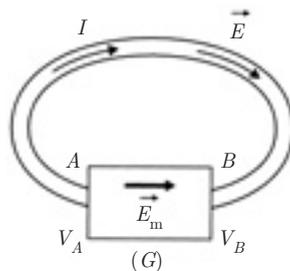
D'où : $\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2} = 1$ et $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k} \tag{6.17}$$

6.7. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE

Soit un générateur (G) appliquant une d.d.p. $V_A - V_B > 0$ aux bornes d'un conducteur AB.

En régime stationnaire ou quasi stationnaire, on a $\text{div } \vec{j} = 0$ en tous les points du circuit, y compris dans le générateur, et les lignes de champ sont des courbes fermées.



Si le conducteur était fermé sur lui-même, on aurait :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{puisque} \quad \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

soit :

$$\oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{ce qui entraînerait} \quad \vec{j} = \vec{0}$$

Preview from Notesale.co.uk
Page 170 of 266

6.9. ASPECT ÉNERGÉTIQUE : LOI DE JOULE

6.9.1 Formulation locale

Reprenons l'équation du mouvement d'une charge q d'un conducteur sous l'action d'un champ appliqué \vec{E} (cf. 6.4.2) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{v} = q \vec{E}$$

En multipliant par \vec{v} , il vient :

$$m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m}{\tau} \vec{v}^2 = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Or :

$$\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} = -\frac{dV}{dt} \quad \text{car} \quad \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV$$

où V est le potentiel. On en déduit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 + qV \right] = -\frac{m v^2}{\tau}$$

L'expression entre crochets n'est autre que l'énergie totale de la charge q , composée de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v^2$ et de l'énergie potentielle qV . Par conséquent, la puissance dissipée par frottement par la charge q est $\frac{m v^2}{\tau}$.

On en déduit que la puissance dissipée par unité de volume est :

$$p = \frac{n m v^2}{\tau}$$

où n est le nombre de porteurs par unité de volume, et comme $v = \frac{j}{nq}$

et que $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$, on peut écrire :

$$p = \frac{m}{nq^2\tau} j^2 = \frac{j^2}{\sigma} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

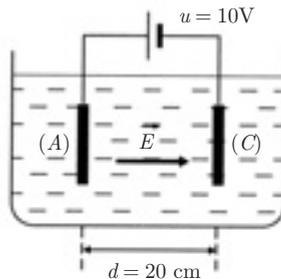
d'où

$$\boxed{p = \sigma E^2} \quad (6.24)$$

6.2. 1) La norme du champ est :

$$E = \frac{u}{d}$$

$$E = \frac{10}{0,2} = 50 \text{ V}$$



Il est orienté de l'anode A vers la cathode C.

2) Une molécule de SO_4Na_2 se dissocie en donnant :



La solution étant décimolaire, on a $\frac{1}{10}$ de mole par litre, soit $\frac{\mathcal{N}}{10} \times 10^3$ molécules par m^3 , d'où :

$$n_- = 10^2 \mathcal{N} \quad \text{soit} \quad n_- = 6,02 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$n_+ = 2 \cdot 10^2 \mathcal{N} = 2 n_- \quad \text{soit} \quad n_+ = 12,04 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Remarque : Les cations portent la charge $q_+ = +e$ et les anions portent la charge $q_- = -2e$. La solution dissociée conserve la neutralité électrique :

$$n_+q_+ + n_-q_- = (n_+)e + n_-(-2e) = 0$$

3) Le vecteur densité de courant est :

$$\vec{j} = n_+q_+\mu_+\vec{E} + n_-q_-\mu_-\vec{E}$$

soit

$$\vec{j} = n_+q_+(\mu_+ + \mu_-)\vec{E} = 2n_-e(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}$$

$$j = 125,22 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \text{ orienté dans le sens } \vec{E}$$

4) On en déduit la résistance R de la solution :

$$R = \frac{u}{jS} \implies R = 26,62 \Omega$$

6.3. 1) Le nombre d'atomes de germanium par m^3 est :

$$N = \frac{10^3 d \mathcal{N}}{M}$$

Preview from Notesale.co.uk
Page 182 of 266

On note que $i(0^+) = E/R$ n'est pas nul : l'intensité du courant subit théoriquement une discontinuité au départ de la charge. En fait, le circuit possède toujours une inductance aussi faible soit-elle et il n'y a pas de véritable discontinuité.

■ Courant de décharge du condensateur

Lorsque l'on court-circuite le condensateur, initialement sous la tension constante E , la source de tension s'écrit :

$$e = E \quad \text{pour} \quad t < 0$$

$$e = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0$$

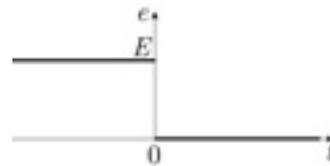


FIG. 7.8

Avec les conventions de la figure, on a :

$$i = -\frac{dq}{dt} \quad \text{et} \quad u = \frac{q}{C}$$

Loi des mailles :

$$u - Ri = 0$$

$$u + R \frac{dq}{dt} = 0$$

$$u + RC \frac{du}{dt} = 0$$

On retrouve l'équation homogène :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$$

dont la solution générale est :

$$u(t) = A e^{-t/\tau}$$

La tension étant continue, on a $u(0) = E$ et, par suite :

$$\boxed{u(t) = E e^{-t/\tau}} \quad (7.9)$$

On a de même $i = -dq/dt = -Cdq/dt$, ce qui donne en explicitant τ :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}} \quad (7.10)$$

Or,

$$\tilde{i} = \frac{d\tilde{q}}{dt} = i\omega \tilde{Q}_m e^{j\omega t} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{i} = \tilde{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \tilde{I}_m = j\omega \tilde{Q}_m$$

Il vient ainsi, après division des deux membres par C :

$$\left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \tilde{I}_m = U_m \quad (7.31)$$

La quantité :

$$\tilde{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad (7.32)$$

s'appelle *l'impédance complexe* du dipôle.

L'expression (7.31) généralise la loi d'Ohm pour un conducteur ohmique :

(loi d'Ohm complexe)

$$U_m = \tilde{Z} \tilde{I}_m \quad (7.33)$$

On vérifie que l'on retrouve la loi d'Ohm habituelle si l'on supprime le condensateur et l'inductance. Notez que l'impédance se mesure en ohm dans le système international.

On peut écrire l'impédance complexe sous la forme :

$$\tilde{Z} = Z e^{j\varphi}$$

$$\text{avec} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad (7.34)$$

Par conséquent $\tilde{I}_m = U_m / \tilde{Z} = I_m e^{-j\varphi}$ de sorte que l'on a :

$$i(t) = \text{Re} \left(I_m e^{-j\varphi} e^{j\omega t} \right) = I_m \cos (\omega t - \varphi)$$

L'expression (7.32) montre que φ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Le module de l'impédance complexe permet de calculer l'amplitude du courant $I_m = U_m / Z$ et son argument φ est le déphasage de la tension appliquée au dipôle par rapport au courant.



La loi d'Ohm complexe a une conséquence importante :



Les lois des circuits linéaires en courant continu s'appliquent en régime sinusoïdal à des associations quelconques de dipôles élémentaires R , L ou C , à condition de considérer les *amplitudes complexes* des courants et des tensions et les *impédances complexes* de ces éléments.

En particulier, les lois des associations de résistances vues au chapitre 6.6 s'appliquent aux impédances complexes (mais pas à leurs modules !) :

■ Association en série

Impédance équivalente : $\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$

■ Association en parallèle

Impédance équivalente : $\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2}$ (cf. figure 7.14)

■ Loi des nœuds. Admittance

La loi d'Ohm peut s'écrire de la façon équivalente suivante, comme pour écrire la loi des nœuds aux bornes de plusieurs dipôles en parallèle.

$$\tilde{I} = \tilde{Y} \tilde{U} \quad (7.35)$$

La quantité :

$$\tilde{Y} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{U}} \quad (7.36)$$

s'appelle l'*admittance* complexe du dipôle.



FIG. 7.14

La figure 7.15 représente les impédances des dipôles linéaires élémentaires (résistance, inductance pure, capacité pure).

L'impédance (l'admittance) est *réelle positive pour un conducteur ohmique, imaginaire pure pour une inductance pure et pour une capacité pure* ; l'inductance déphase la tension de $+\pi/2$ sur le courant (*quadrature avance*), la capacité déphase la tension de $-\pi/2$ (*quadrature retard*).

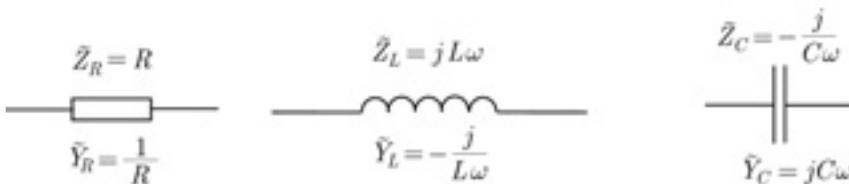


FIG. 7.15

Preview from Notesale.co.uk
Page 205 of 266

On trouve $Z = \sqrt{4 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2} \simeq 200 \Omega$ et $\tan \varphi = 0,2$, soit $\varphi = 11,3^\circ \simeq \pi/8$: l'avance de phase de la tension sur le courant est faible et c'est la résistance qui joue un rôle prédominant ($L\omega \ll r$).

■ Résonance d'intensité dans le dipôle R, L, C

Lorsque l'on fait varier la pulsation, l'amplitude de l'intensité $I_m = U_m/Z$ passe par un maximum I_M quand Z est minimal, c'est-à-dire pour la pulsation de résonance ω_0 correspondant à :

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (7.37)$$

On a donc à la résonance :

$$\boxed{\tilde{Z} = R} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = 0} \quad (7.38)$$



À la résonance d'intensité, le courant et la tension sont en phase, l'impédance du dipôle est réelle et égale à sa résistance.

Par conséquent :

$$I_M = \frac{U_m}{R}$$

L'impédance du condensateur et l'impédance due à l'inductance L de la bobine sont égales. Si la résistance est inférieure à celle du condensateur, alors les tensions aux bornes de celui-ci et de la bobine seront supérieures à la tension appliquée U_m (*surtension*). Le rapport de surtension est :

$$\frac{U_C}{U_m} = \frac{I_M/C\omega_0}{RI_M} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$$

Ainsi, le rapport de surtension à la résonance est égal au facteur de qualité Q du circuit du dipôle et la pulsation de résonance coïncide avec la pulsation propre des oscillations libres du circuit.

7.3.3 Puissance moyenne consommée dans un dipôle

■ Expression générale

En régime stationnaire (ou quasi stationnaire) lorsqu'une charge dq entre par la borne A d'un dipôle pendant l'intervalle de temps dt , il ressort la même

Notez bien que le théorème n'est pas applicable sous cette forme si l'une des branches aboutissant en N est active, en particulier par exemple si elle impose une tension donnée (ce qui suppose la présence d'une source de tension).

Prenez garde également à ne pas oublier de compter au dénominateur les impédances des branches correspondant à des potentiels \tilde{V}_k nuls.

■ Théorème de Thévenin

Le courant qui circule dans une branche AB d'un réseau linéaire est le même que si la branche AB était alimentée par une source de tension \tilde{E}_t égale à la tension obtenue entre A et B en supprimant la branche AB , en série avec une impédance \tilde{Z}_R égale à l'impédance équivalente entre A et B dans les mêmes conditions.

Ce théorème est utile pour trouver l'intensité du courant dans une branche particulière du réseau.

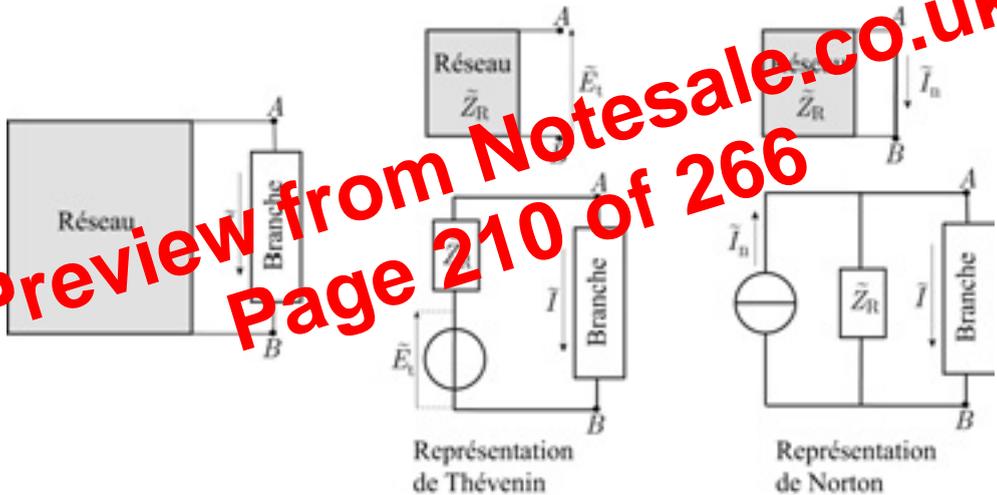


FIG. 7.18

■ Théorème de Norton

Le courant qui circule dans une branche AB d'un réseau linéaire est le même que si la branche AB était alimentée par une source de courant d'intensité \tilde{I}_n égale à l'intensité entre A et B en remplaçant la branche AB par un court-circuit, en parallèle avec une impédance \tilde{Z}_R égale à l'impédance équivalente entre A et B dans les mêmes conditions.

Ce théorème est surtout utilisé en électronique dans des circuits comportant des transistors, car ceux-ci font office de sources de courant.

2) On désire éliminer des signaux de fréquence égale à 500 Hz dans un circuit. On intercale pour cela dans le circuit un dipôle constitué par une bobine d'inductance 0,25 H et de résistance 16 Ω en parallèle avec un condensateur. Quelle doit être la capacité de celui-ci ? Quelle est alors l'impédance de ce dipôle ?

7.7. Étude d'une branche dans un circuit

Dans le circuit de la figure 7.22, on donne $i_2 = I_0 \cos \omega t$ ainsi que L, C, R . Calculer $u(t)$, $i_1(t)$ et le déphasage φ de u par rapport à la tension v aux bornes du condensateur. On exprimera les phases de $u(t)$ et $i_1(t)$ en fonction de φ .

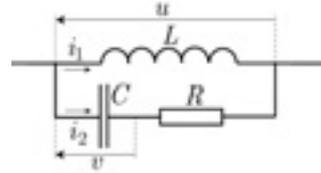


FIG. 7.22

7.8. Filtre

La tension d'entrée du filtre de la figure 7.23 est (en volt) :

$$u_1(t) = 120 \sin 300t + 120 \sin 500t$$

Calculer la tension de sortie $u_2(t)$ en circuit ouvert.



FIG. 7.23

7.9. Pont déphaseur

Une tension $v(t) = V_0 \cos \omega t$ est appliquée entre les points A et B de la figure 7.24, tandis que la tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t - \varphi)$ est prélevée entre les points M et N.

1) Montrer que $V_0 = U_0$ en circuit ouvert entre M et N quand $RC = R_1 C_1$.

2) Trouver le déphasage φ lorsque cette condition est réalisée. Quelle est la valeur de φ si $R = 1/C\omega$?

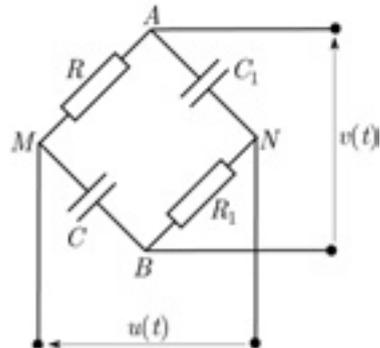


FIG. 7.24

CORRIGÉS

7.1. Surtension aux bornes d'un interrupteur

1) La loi des mailles s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} + Ri - E = u(t) = \frac{q}{C}$$

soit, avec $i = dq/dt = Cdu/dt$ et $\tau = L/R$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = E$$

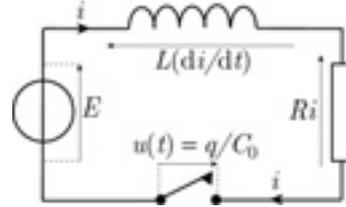


FIG. 7.27

C étant très faible, le discriminant de l'équation caractéristique de l'équation homogène est certainement négatif. On a donc une solution de la forme :

$$u(t) = E + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avant l'ouverture de l'interrupteur l'inductance ne joue aucun rôle, le courant est continu et a pour intensité $I = E/R$. L'inductance impose la continuité du courant, c'est-à-dire de du/dt , et donc *a fortiori* celle de la tension u :

$$\frac{du}{dt} = \left[\left(-\frac{1}{\tau} + \omega B \right) \cos \omega t + \left(\frac{1}{\tau} \sin \omega t + \omega A \right) \sin \omega t \right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soit, à $t = 0$:

$$E = E + A \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad (\text{continuité de } u)$$

$$i(0) = C \frac{du}{dt}(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{R} = C \omega B \quad (\text{continuité de } i)$$

En définitive :

$$u(t) = E \left(1 + \frac{1}{RC\omega} \sin \omega t \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2) La constante de temps du circuit est :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10^{-5}}{10^2} \quad \text{soit} \quad \tau \simeq 6 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

Si l'on néglige l'amortissement, la période des oscillations est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{10^{-5} \times 10^{-13}} \quad \text{soit} \quad T_0 \simeq 6 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$$

Or,

$$\tilde{I}_2 = jC\omega\tilde{V} \implies \tilde{U} = \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\tilde{V}$$

Le déphasage φ entre $u(t)$ et $v(t)$ est donc :

$$\varphi = \arctan(RC\omega)$$

Par suite, $\arg \tilde{U} = \varphi - \pi/2$:

$$u(t) = \operatorname{Re}(\tilde{U} e^{i\omega t}) = U \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

soit enfin :

$$u(t) = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{C\omega} I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \frac{\tilde{U}}{jL\omega} = -\left(\frac{1 + jRC\omega}{LC\omega^2}\right) I_0 \\ &= -\frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{LC\omega^2} I_0 e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Finalement en prenant la partie réelle de $\tilde{I}_1 e^{i\omega t}$, il vient :

$$i_1(t) = -\frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{LC\omega^2} I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Comme on pouvait s'y attendre, la tension aux bornes de l'inductance supposée pure est en quadrature avance sur le courant qui la traverse.

7.8. Filtre

Nous allons appliquer le principe de superposition, la tension d'entrée $u_1(t)$ étant la somme algébrique de deux tensions sinusoïdales de pulsations différentes, soit ω et ω' . La figure 7.33 indique les sens positifs choisis pour les courants (représentés par leurs amplitudes complexes) et tient compte de la loi des nœuds. Notez que, le circuit étant ouvert entre P et M (il n'y a pas de circuit extérieur), le courant dans les branches NP et PM est le même, ce qui n'est pas le cas dans les branches BA et AN car la tension entre A et B est imposée.

Deuxième méthode

Il était ici tout particulièrement indiqué d'utiliser le théorème de Millmann, ce qui conduit plus simplement au résultat. En posant $\tilde{V}_B = \tilde{V}_M = 0$, la somme des admittances des branches aboutissant au nœud N est :

$$\tilde{Y}_N = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + j C \omega = \frac{2}{R} + j C \omega \quad \text{d'où}$$

$$\tilde{V}_N = \frac{\tilde{V}_A/R + \tilde{V}_P/R}{2/R + j C \omega} = \frac{\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2}{2 + j RC \omega}$$

De même pour le nœud P :

$$\tilde{Y}_P = \frac{1}{R} + j C \omega = \frac{1}{R} + j C \omega \quad \text{d'où}$$

$$\tilde{V}_P = \frac{\tilde{V}_N/R + 0 \times j C \omega}{1/R + j C \omega} = \frac{\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2}{(2 + j RC \omega)(1 + j RC \omega)}$$

Comme $\tilde{V}_P = \tilde{U}_2$, il vient :

$$\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 = \tilde{U}_2 (2 - R^2 C^2 \omega^2 + 3 j RC \omega)$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{\tilde{U}_1}{1 - R^2 C^2 \omega^2 + 3 j RC \omega}$$

C'est bien le résultat obtenu plus haut.

On aurait pu également utiliser le théorème de Millmann au nœud A plutôt qu'en P , mais ce n'est pas possible car le circuit n'est pas ouvert entre A et B : on ne possède aucune information sur le dipôle extérieur AB , qui est ici équivalent à un générateur de Thévenin.

7.9. Pont déphaseur

1) Cherchons la relation entre les amplitudes complexes \tilde{U} et \tilde{V} des tensions $u(t)$ et $v(t)$. En circuit ouvert entre M et N , le courant est le même dans les dipôles AM et MB d'une part, dans les dipôles AN et NB d'autre part et l'on a (cf. figure 7.34) :

$$\tilde{V} = R \tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{j C \omega} = \frac{\tilde{I}_1}{j C_1 \omega} + R_1 \tilde{I}_1$$

$$\tilde{U} = -R \tilde{I} + \frac{\tilde{I}_1}{j C_1 \omega}$$

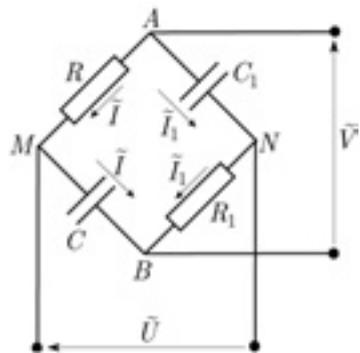


FIG. 7.34

Preview from Notesale.co.uk
Page 224 of 266

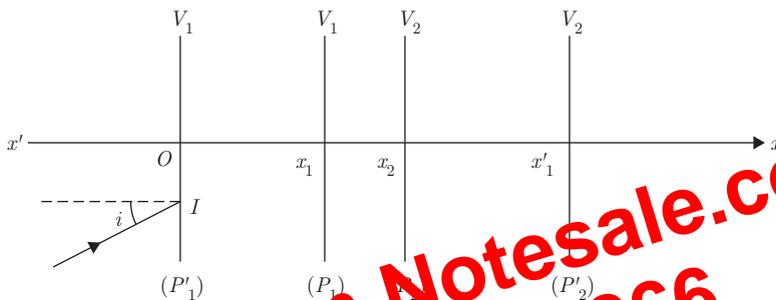
b) Quelle est la charge Q portée par la sphère (S) ?

c) Quel est le champ électrique \vec{E} en un point M de la sphère ?

d) En déduire la densité surfacique de charge portée par la sphère ?

3) On maintient la charge q à la distance D de (S) mais cette fois, la sphère conductrice, initialement neutre, est isolée. En appliquant le théorème de superposition, calculer le potentiel de cette sphère.

Problème n° 5



Quatre plaques métalliques P'_1, P_1, P_2, P'_2 sont disposées comme l'indique la figure. On a supposé ces plaques à des plans illimités.

Les lames métalliques sont suffisamment minces pour être perméables aux électrons. (P'_1) et (P_1) sont portés au potentiel V_1 , (P_2) et (P'_2) au potentiel V_2 avec $V_2 > V_1 > 0$.

Une source émet des électrons vers (P'_1) avec une vitesse initiale \vec{v}_0 . L'origine des potentiels sera prise sur la source.

Un électron dont la trajectoire rectiligne fait l'angle i avec $x'Ox$, arrive au point I sur (P'_1) .

1) On admet que le potentiel ne dépend que de x . Sachant que le potentiel $V(x)$ vérifie l'équation de Laplace $\frac{d^2V(x)}{dx^2} = 0$, calculer $V(x)$ et tracer la courbe $V(x)$. Tracer sur le même graphique la courbe représentant la norme du champ électrique $E(x)$. Quelle est la nature de la trajectoire de l'électron entre les lames (P'_1) et (P_1) , (P_1) et (P_2) , (P_2) et (P'_2) ?

Par continuité du potentiel en x_1 et en x_2 :

$$V(x_1) = V_1 = ax_1 + b$$

$$V(x_2) = V_2 = ax_2 + b$$

$$a = \frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad b = \frac{V_2x_1 - V_1x_2}{x_1 - x_2}$$

Ainsi, pour $x_1 \leq x \leq x_2$ on a :

$$V(x) = \frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1}x + \frac{V_2x_1 - V_1x_2}{x_1 - x_2}$$

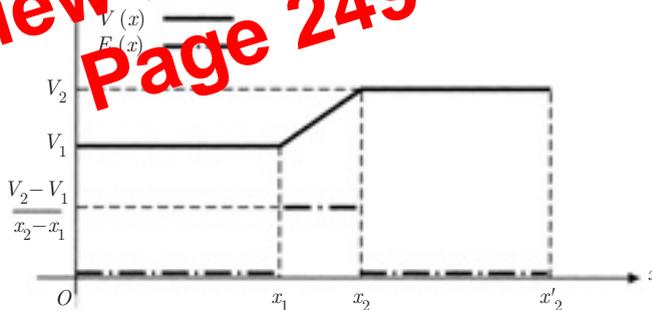
L'équation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ donne $E_x(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$

$$\text{pour } 0 < x < x_1 \quad E_x = 0$$

$$\text{pour } x_1 < x < x_2 \quad E_x = -\frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{pour } x_2 < x < x'_2 \quad E_x = 0$$

Représentation graphique de $V(x)$ et de $E(x)$:



On remarque que le champ \vec{E} est discontinu en $x = x_1$ et $x = x_2$.

Nature des trajectoires :

La force $\vec{F} = -e\vec{E}$ qui agit sur l'électron est opposée à \vec{E} :

$$\text{pour } 0 < x < x_1 \quad F_x = 0$$

$$\text{pour } x_1 < x < x_2 \quad F_x = e \frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} (> 0)$$

En égalant les valeurs de V_y pour un point $x \in [0, x_1]$ et un point $x' \in [x_2, x'_2]$ on obtient :

$$v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2 \implies \sqrt{V_1} \sin i_1 = \sqrt{V_2} \sin i_2$$

En comparant avec la loi de Descartes en Optique :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

on en déduit la relation de correspondance entre l'indice de réfraction n et le potentiel V :

$$n = \sqrt{V}$$

Si les deux plans P_1 et P_2 sont suffisamment rapprochés pour que l'on puisse confondre I_1 et I_2 , on voit que la trajectoire de l'électron subit une réfraction là où le potentiel change de valeur.

4) La relation $\sqrt{V_1} \sin i_1 = \sqrt{V_2} \sin i_2$ montre que si $V_2 > V_1$ alors $i_2 < i_1$, l'électron se rapproche de l'axe $x'Ox$. Un dispositif formé de deux grilles rapprochées et portées à des potentiels judicieusement choisis permettra de focaliser un faisceau d'électrons dans un microscope électronique.

Problème n° 6. Étude d'un réseau capacitif

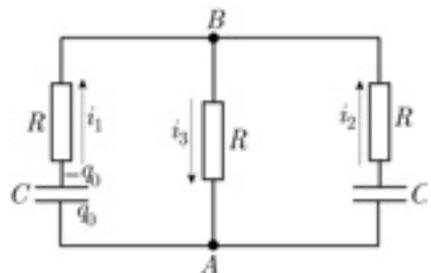
1) La loi des nœuds en B donne la relation demandée :

$$i_1 + i_2 = i_3 \quad (1)$$

2) En considérant successivement les trois dipôles AB on peut écrire trois expressions de $V_A - V_B$, ce qui donne les deux relations suivantes :

$$-\frac{q_1}{C} + Ri_1 = -Ri_3 \quad (2)$$

$$-\frac{q_2}{C} + Ri_2 = -Ri_3 \quad (3)$$



10) Graphe de U_n/U_0 en fonction de ω :

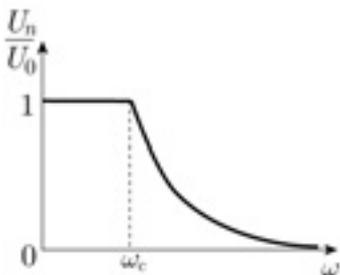


FIG. 5

Preview from Notesale.co.uk
Page 260 of 266