$$A = \{x \mid x - \text{ს აქვს } P \text{ თვისება}\}$$

მაგალითი 1. 2 $\{x \mid x > 0\}$ წარმოადგენს ყველა დადებით რიცხვთა სიმრავლეს.

მაგალითი 1. 3 $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1;1\}$

სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს ცარიელი სიმრავლე ეწოდება. იგი $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ, მოცემულია ორი სიმრავლე A და B. A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ნაწილი, ანუ ქვესიმრავლე, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი B სიმრავლეს ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში წერენ $A \subset B$ ან $B \supset A$. ეს იკითხება ასე: A სიმრავლე შედის B სიმრავლეში. **ცარიელი სიმრავლე ყოველი A სიმრავლის ქვესიმრავლედ ითვლება.** (იმისათვის, რომ ეს წინადადება სავსებით ცხადი გახდეს, საკმარისია ზემოთ მოყვანილი განმარტება ასეთი სახით გამოითქვას: A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ქვესიმრავლე, თუ $x \notin B$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს $x \notin A$.)

მაგალითი 1. 4 განვიხილოთ სიმრავლე $A = \{a, b, c\}$. სიმრავლეები $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ A სიმრავლის ქვესიმრავლეებია.

ვთქვათ, A და B ისეთი სიმრავლეებია, რომ $A \subset B$ და $B \subset A$. მაშინ ვიტყვით, რომ A და B ტოლი სიმრავლეებია და ვწერთ: $A = B$.

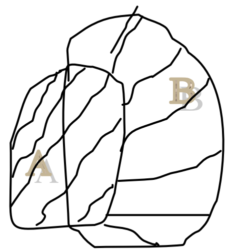
მაგალითი 1. 5 ვთქვათ, $A = \{1,5,9\}$ და $B = \{5,1,9\}$. ცხადია, რომ $A = B$.

მაგალითი 1. 6 ვთქვათ, $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{2,3\}$ და $C = \{y \mid (\sin y + 5)(y - 2)(y - 3) = 0\}$. ცხადია, რომ $A = B = C$.

სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ იგი სასრული რაოდენობის ელემენტებისგან შედგება. მაგ.: $A = \{1,7,9\}$ სასრული სიმრავლეა.

არაცარიელ სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი სასრული არაა. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არის უსასრულო სიმრავლის მაგალითი.

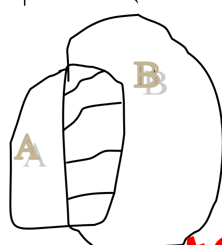
მოქმედებები სიმრავლეებზე. ვთქვათ მოცემულია ორი, A და B სიმრავლე. A და B სიმრავლეების გაერთიანება ეწოდება ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნიან. A და B სიმრავლეების გაერთიანება აღინიშნება $A \cup B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ან } x \in B\}$.



$A\cup B$

მაგალითი 1. 7 $A=\{1,7,9\}$, $B=\{1,7,10,11\}$ $A\cup B=\{1,7,9,10,11\}$.

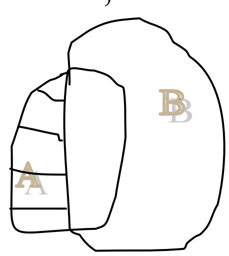
A და B სიმრავლეების თანაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნიან როგორც A ისე B სიმრავლეს. A და B სიმრავლეების თანაკვეთა აღინიშნება $A\cap B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A\cap B=\{x \mid x\in A$ და $x\in B\}$.



$A\cap B$

მაგ.ალითი 1. 8 $A=\{1,7,9\}$, $B=\{1,7,10,11\}$ $A\cap B=\{1,7\}$

A და B სიმრავლეების სხვაობა ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტებისაგან შემდგარ სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან. A და B სიმრავლეთა სხვაობა აღინიშნება $A\setminus B$ სიმბოლოთი. ამგვარად, $A\setminus B=\{x \mid x\in A$ და $x\notin B\}$.



$A\setminus B$

მაგალითი 1. 9. $A=\{1,7,9\}$, $B=\{1,7,10,11\}$ $A\setminus B=\{9\}$

შენიშვნა 1. 1. საზოგადოდ $(A\setminus B)\cup B\neq A$

მაგალითი 1. 10. $A=\{1,7,9\}$, $B=\{17,10,11\}$. ცხადია, რომ $A\setminus B=\{9\}$, მაგრამ $(A\setminus B)\cup B=\{1,5,9,10,11\}\neq A$.

16*. შეამოწმეთ ტოლობები:

ა) $(A\times B)\cup(X\times B)=(A\cup X)\times B$;

ბ) $(A\times B)\cap(X\times Y)=(A\cap X)\times(B\cap Y)$.

გ) სამართლიანი არის თუ არა ტოლობა
$(A\times B)\cup(X\times Y)=(A\cup X)\times(B\times Y)$?

17. დაშტრიხეთ სიმრავლეები ა) $\{x\,|\,4x+2\le 0\}$; ბ) $\{x\,|\,x^2-3x+2\le 0\}$;

გ) $\{x\,|\sin^2 x+\cos^2 x<-1\}$; დ) $\{x\,|\,x+\dfrac{1}{x}>2\}$; ე) $\{x\,|\,0<x^2-5x+6<6\}$;

ვ) $\{x\,|\;|5-3x|<1\}$.

2. ფუნქცია

ელემენტარული წარმოდგენები ფუნქციებზე

ფუნქციის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა. აღნიშნული ცნების გასააზრებლად შევნიშნოთ, რომ ფიზიკური და გეომეტრიული კანონზომიერებები გამოისახება როგორც რიცხვებს შორის დამოკიდებულებები. მათემატიკისათვის ამ თანაფარდობებს შორის მნიშვნელოვანია ისეთი დამოკიდებულებები, როდესაც ერთი სიდიდის რაიმე მოცემული მნიშვნელობით ცალსახად განისაზღვრება მეორე სიდიდის მნიშვნელობა. მაგალითად, თუ ვიცით, რომ კვადრატის გვერდის სიგრძეა x, *მაშინ მის ფართობს გამოვთვლით ცალსახად, ფორმულით* $S=x^2$. *სწორედ ეს ფორმულა გამოხატავს ფუნქციურ (ანუ ცალსახა) დამოკიდებულებას* x *ცვლადს (კვადრატის გვერდის სიგრძეს) და* S *ცვლადს (კვადრატის ფართობს) შორის. მაშასადამე კანონზომიერებები, რომლის დროსაც ერთი სიდიდის მნიშვნელობა ცალსახად განსაზღვრავს მეორე სიდიდის მნიშვნელობას, აღიწერებიან რიცხვითი ფუნქციებით.*

ვთქვათ, E არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე არაცარიელი ქვესიმრავლე, ხოლო R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. ვიტყვით, რომ E-სიმრავლეზე მოცემულია (განსაზღვრულია) ფუნქცია მნიშვნელობებით R სიმრავლეში, თუ მოცემულია f წესი, რომლის საშუალებითაც E სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება R სიმრალის ერთადერთი ელემენტი. აღნიშნულ ფაქტს სიმბოლურად ასე ჩავწერთ: $f:E\to R$ ან $E\xrightarrow{f}R$. E სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება, f-ს კი – ფუნქციის მოცემის წესი. ზოგად $x\in E$ ელემენტს ვუწოდებთ ფუნქციის არგუმენტს (ან დამოუკიდებელ ცვლადს). თუ არგუმენტის კონკრეტულ x_0 მნიშვნელობას მოცემული f წესით ეთანადება $y_0\in R$ რიცხვი, მაშინ y_0-ს ვუწოდებთ f ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში

$$f := x \to x^2 + 2\,x + 3$$

\> **g:=x->x+3;**

$$g := x \to x + 3$$

\> **plot([f(x),g(x)],x=-2..2);**

\> **h:=x->f(g(x));**

$$h := x \to \mathrm{f}(\,\mathrm{g}(\,x\,)\,)$$

\> **h(x);**

$$(\,x + 3\,)^2 + 2\,x + 9$$

\> **r:=x->g(f(x));**

$$r := x \to \mathrm{g}(\,\mathrm{f}(\,x\,)\,)$$

\> **r(x);**

$$x^2 + 2\,x + 6$$

\> **plot([h(x),g(x)],x=-2..2);**

2. ვთქვათ, $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}) = 3(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}) - 2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = \frac{1}{3}(3x - 2) + \frac{2}{3} = x$$

ამ შემთხვევაში, როგორც ვხედავთ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. მაგალითი 1-დან ჩანს, რომ ასეთ ტოლობას ყოველთვის არა აქვს ადგილი.
იმ შემთხვევაში, როცა $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, საქმე გვაქვს სპეციალური ტიპის f და g ფუნქციებთან.

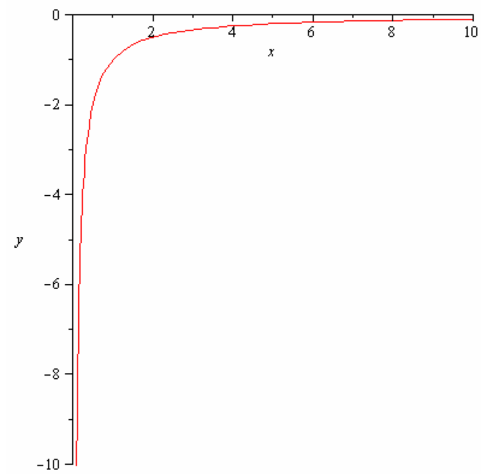
შექცეული ფუნქცია. როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ გვაქვს $f(x) = 3x - 2$ და $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ფუნქციები, მაშინ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

$$f(-1) = 3(-1) - 2 = -5 \quad \Rightarrow \quad g(-5) = \frac{1}{3}(-5) + \frac{2}{3} = -1$$

$$g(2) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad f(\frac{4}{3}) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 2 = 2$$

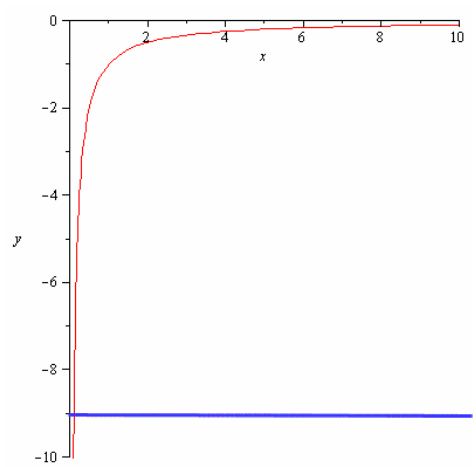
როგორც ვხედავთ, f -ის მნიშვნელობა -1-ში არის -5, ხოლო g -ს მნიშვნელობა -5-ში -1-ის ტოლია, g -ს მნიშვნელობა 2-ში 4/3-ია, მაშინ, როცა f -ის მნიშვნელობა 4/3-ში არის 2. შევნიშნოთ, რომ ჩვენ

მაგალითი 2. 13. განვიხილოთ $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ ფუნქცია $(0,1]$ შუალედში. ე.ი. $f:(0,1] \to R$.



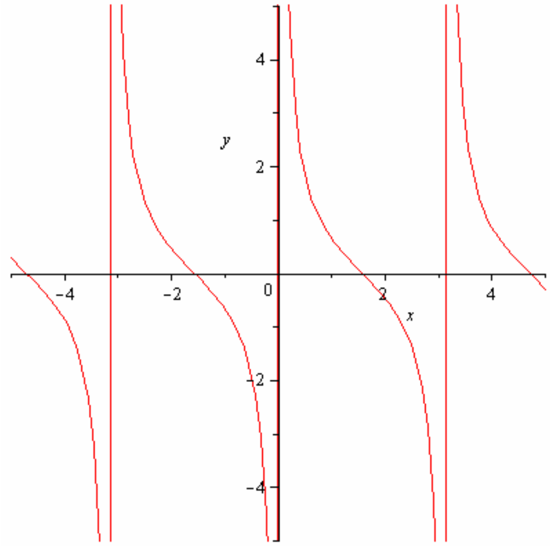
ეს ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრულია, რადგან ყოველი x-სთვის $(0,1]$-დან $f(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$. მაგრამ f არაა შემოსაზღვრული, რადგან იგი არაა ქვემოდან შემოსაზღვრული. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი რაგინდ დიდი A_0 დადებითი რიცხვი $(A > 1)$. ავიღოთ $x_0 = \dfrac{1}{2A}$, $x_0 \in (0,1]$ ამასთან

$$|f(x_0)| = \frac{1}{x_0} = 2A > A.$$



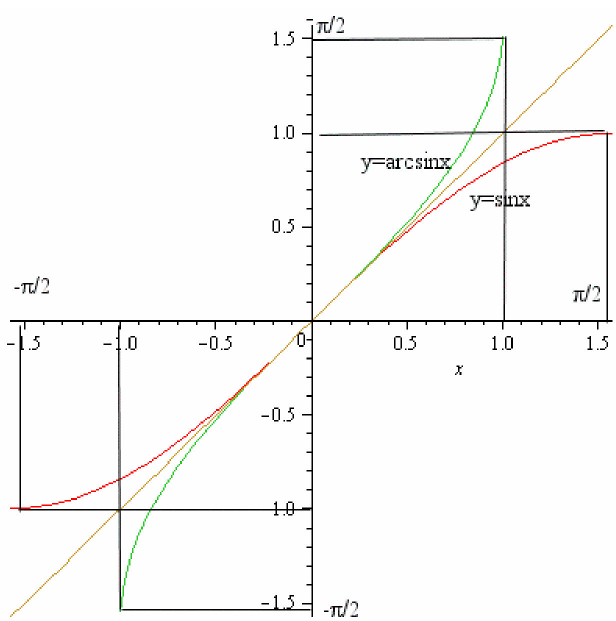
ე.ი. $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ არაა შემოსაზღვრული $(0,1]$-ზე.

2. ფუნქციის მნიშვნელობათა არეა $E(\cot)=\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
3. ფუნქცია კენტია, ე.ი. $\forall x\in\mathbb{R}$ რიცხვისათვის სამართლიანია ტოლობა $\cot(-x)=-\cot x$;
4. ფუნქცია პერიოდულია, მას გააჩნია უმცირესი დადებითი პერიოდი, რომელიც π-ს ტოლია, ე.ი. $\forall x\in\mathbb{R}$ და $\forall k\in\mathbb{Z}$ რიცხვებისათვის $\cot(x+\pi k)=\cot x$;
5. ფუნქცია დადებით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k)$ სიმრავლე-ზე, ხოლო უარყოფით მნიშვნელობებს ღებულობს $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\pi k)$ სიმრავლეზე;
6. $\forall k\in\mathbb{Z}$ მთელი რიცხვისათვის ფუნქცია კლებადია $(\pi k,\pi+2\pi k)$ სახის ყოველ ინტერვალში;
7. ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



$y=\arcsin x$ ფუნქცია

მტკიცდება, რომ $y=\sin x$ ფუნქციის შეზღუდვა $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ სეგმენტზე წარმოადგენს ურთიერთცალსახა ფუნქციას $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ სეგმენტიდან $[-1,1]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის- $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ შექცეული ფუნქცია, რომელსაც $\arcsin$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ე.ი. $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, რომელიც განიმარტება ტოლობით: $\sin(\arcsin x)=x$, $\forall x\in[-1,1]$.



შენიშვნა 2. 6. $\arcsin$ *ფუნქცია წარმოადგენს* $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ *ფუნქციის შექცეულს და არა* $\sin$ *ფუნქციის შექცეულს, ამიტომ* $\arcsin(\sin x)=x$ *ტოლობა საზოგადოდ არასწორია, ის*

ამოხსნა. $y = f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის k-ჯერ შეკუმშვით, როცა $k > 1$ და k-ჯერ გაჭიმვით, როცა $0 < k < 1$ OX ღერძის გასწვრივ. თუ $k < 0$ მაშინ $y = f(kx)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = f(-kx)$ ფუნქციის გრაფიკები OY ღერძის მიმართ სიმეტრიული ფიგურებია.

საილუსტრაციოთ განვიხილოთ ფუნქცია $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ რომელსაც წილად-წრფივ ფუნქციას უწოდებენ. სკოლის კურსიდან ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის თვისებები და მისი გრაფიკი რომელიც წარმოადგენს ჰიპერბოლას ($k \neq 0$). ვაჩვენოთ, რომ როცა $c \neq 0$ და $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ მაშინ წილად წრფივი ფუნქციის გრაფიკი ჰიპერბოლაა.

შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია წარმოდგენა

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

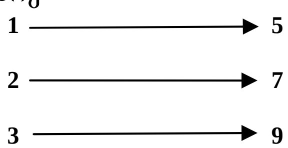
ავღნიშნოთ $\frac{bc-ad}{c^2} = k$. მაშინ $y = \frac{a}{c} + \frac{k}{x + \frac{d}{c}}$ ფუნქციის გრაფიკი

შეგვიძლია მივიღოთ $y = \frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკიდან თანმიმდევრობით OX და მერე OY ღერძის გასწვრივ პარალელური გადატანით (ამოცანა 3, 4).

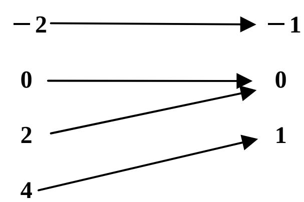
სავარჯიშოები

1. ქვემოთ მოცემული შესაბამისობებიდან გამოარკვიეთ რომელი წარმოადგენს ფუნქციას. თითოეული შესაბამისობა ჩაწერეთ წყვილების საშუალებით.

1) განსაზღვრის არე მნიშვნელობათა . არე



2) განსაზღვრის არე მნიშვნელობათა . არე



ა) $f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$

ბ) $f(x) = A\cos kx + B\sin kx$

გ) $f(x) = \sqrt{|\cot x|}$

დ) $f(x) = tg\frac{x}{2} + tg\frac{x}{3}$

70. შემოსაზღვრულია თუ არა შემდეგი ფუნქციები

ა) $f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$

ბ) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

გ) $f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad D(f) = [2,3]$

დ) $f(x) = tg\frac{x}{2}$

71. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობა-კლებადობის შუალედები, ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმის წერტილები

ა) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 2] \\ 2, & x \in (2,3] \\ 5 - x, & x \in (3,5] \\ x - 5, & x \in (5, +\infty) \end{cases}$

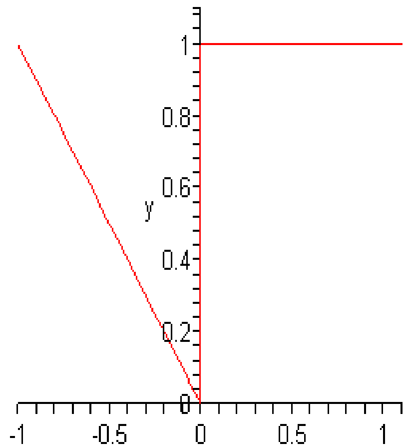
ბ) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-5,2] \\ 2, & x \in (2,3] \\ 5 - x, & x \in (3,5] \\ x - 5, & x \in (5,10] \end{cases}$

გ) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \in [2,3] \\ 2, & x \in (3,4] \\ 6 - x, & x \in (4,5] \\ x - 4, & x \in (5,10] \end{cases}$

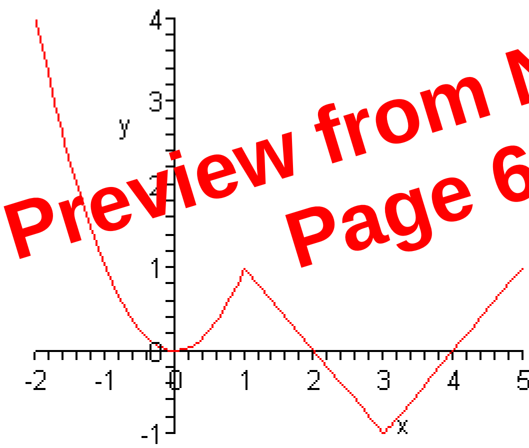
დ) $f(x) = x^2 + 2x, \; x \in [-2,2]$

72. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ზრდადობა-კლებადობის შუალედები, ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმის წერტილები

ა)

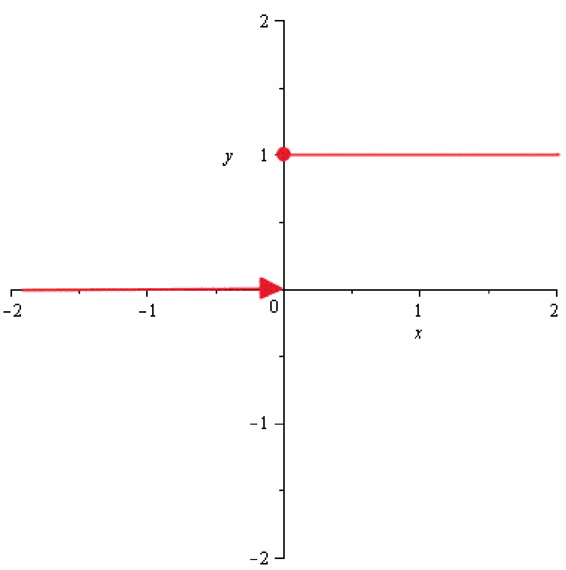


ბ)



გ)

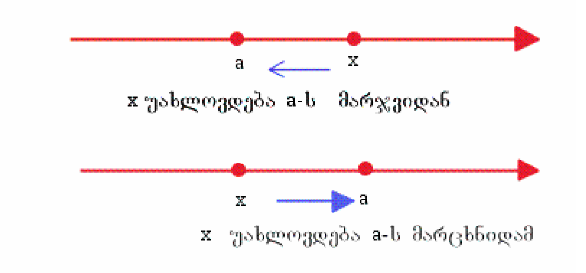
$$h(x)=\begin{cases}0\,,\; x<0\\ 1\,,\; x\geq 0\end{cases}$$



როგორც ვხედავთ, როცა $x=0$ წერტილს ვუახლოვდებით მარჯვნიდან, ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 1-ს, ხოლო თუ $x=0$-ს ვუახლოვდებით მარცხნიდან, მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 0-ს. ფუნქციის ზღვრის განმარტების ძალით, ფუნქციის მნიშვნელობები უნდა მიუახლოვდნენ ერთ კონკრეტულ სიდიდეს, როცა x უახლოვდება a-ს (ორივე მხრიდან). ამ შემთხვევაში ეს არ ხდება. ე.ი. ამ ფუნქციას $x=0$ წერტილში არა აქვს ზღვარი.

ცალმხრივი ზღვრები. როგორც ვნახეთ, მაგალით 3. 3 –ში მოცემულ ფუნქციას ზღვარი არ გააჩნიათ $x=0$ წერტილში, რადგან ფუნქციის მნიშვნელობები არ უახლოვდებიან ერთ კონკრეტულ სიდიდეს, როცა განსაზღვრის არის წერტილები რაგინდ ახლოს არიან 0-თან. ამის მიზეზი არის ის, რომ ფუნქციის მნიშვნელობები ორი სხვადასხვა რიცხვის ირგვლივ იყრიან თავს, იმის და მიხედვით, თუ რომელი მხრიდან უახლოვდებიან x-ები 0-ს. ამ შემთხვევას მივყავართ ე.წ. ცალმხრივ ზღვრებამდე.

მარჯვენა ზღვარი. ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარჯვნიდან $x=a$ წერტილში არის A რიცხვი, თუ შეგვიძლია $f(x)$ რაგინდ დავუახლოვოთ A-ს, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან მარჯვნიდან. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A$ ან, $f(x)\to A$, როცა $x\to a+$.



მარცხენა ზღვარი. ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის ზღვარი მარცხნიდან $x=a$ წერტილში არის A რიცხვი, თუ შეგვიძლია $f(x)$ რაგინდ დავუახლოვოთ A-ს, როცა x საკმაოდ ახლოსაა a-თან მარცხნიდან. ამ ფაქტს ასე ჩავწერთ: $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=A$ ან, $f(x)\to A$, როცა $x\to a-$.

მაგალითი 3. 4. კიდევ ერთხელ დავუბრუნდეთ ზემოთ განხილულ $h(x)=\begin{cases}0\,,\; x<0\\ 1\,,\; x\geq 0\end{cases}$ ფუნქციას.

როგორც ვხედავთ, თუ x მარჯვნიდან უახლოვდება 0-ს ($x>0$), მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 1-ს. ე.ი.

$$\lim_{x\to 0+} h(x)=1$$

ანალოგიურად, თუ x მარცხნიდან უახლოვდება 0-ს ($x<0$), მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობები უახლოვდებიან 0-ს. ე.ი.

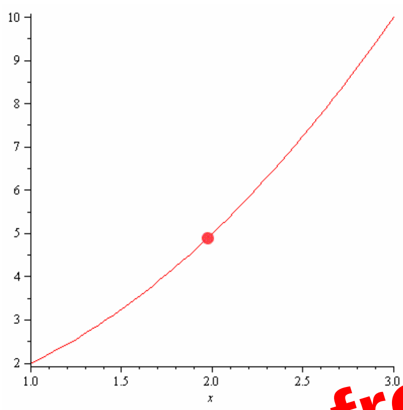
4. ფუნქციის უწყვეტობა

ჩვენ ზემოთ შევეხეთ “კარგ” ფუნქციებს, რომელთაც ის თვისება ჰქონდათ, რომ ამ ფუნქციების ზღვარი მოცემულ წერტილში ამავე წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლია.

უწყვეტობა წერტილში. ვთქვათ $f:[a,b]\to R$ და $a<c<b$ (ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ c არის $[a,b]$ სეგმენტის შიგა წერტილი)

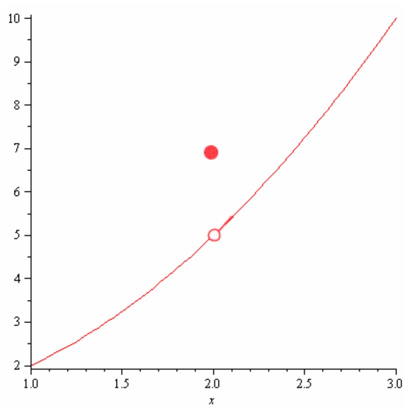
განსაზღვრება 4. 1. ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია c წერტილში, თუ

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$



განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია. რადგანაც $\lim_{x\to 2} f(x)=5=f(2)$. ამიტომ მოცემული ფუნქცია უწყვეტია $x=2$ წერტილში.

ნახაზი 1



თუ ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით (იხ. ნახაზი 2) მაშინ მოცემული ფუნქცია არ არის უწყვეტი $x=2$ წერტილში. მართლაც, $\lim_{x\to 2} f(x)=5\neq f(2)=7$.

ნახაზი 2

$$\lim_{x \to (-1)+} \frac{1}{x+1} = \infty$$

```
> Limit((1-x^2)/(3*x^2-x-1), x=infinity)=limit((1-x^2)/(3*x^2-x-1), x=infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1-x^2}{3\,x^2-x-1} = \frac{-1}{3}$$

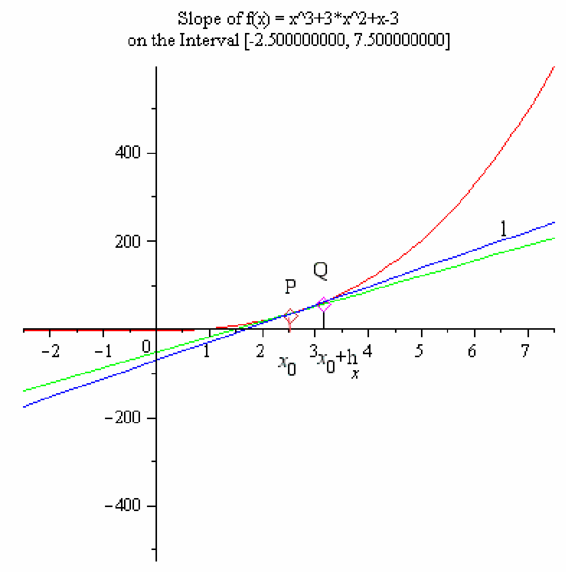
სავარჯიშოები

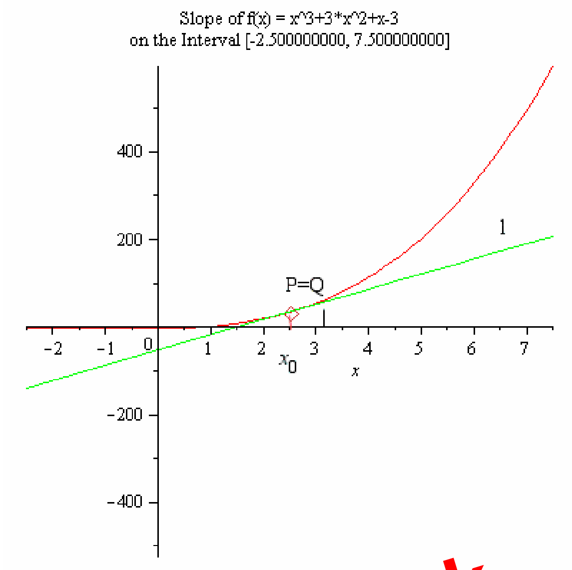
1. გამოთვალეთ ზღვრები:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)$
2. $\lim\limits_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+5)$
3. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+1)$
4. $\lim\limits_{x\to \pi}(\sin 2x\ +2\cos 5x+x)$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x}{x^3+5x^2+1}$
6. $\lim\limits_{x\to 2}(\log_2 x\ +e^{2x})$
7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$
8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x\ +2}{x^4-4x+3}$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$
12. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$
13. $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{x\ -27}{\sqrt[3]{x}-3}$
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\ -\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}\ -\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

2. გამოთვალეთ:

1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, თუ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2}, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, თუ $f(x)=\begin{cases}\sin 5x, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, თუ $f(x)=(x^2-1)\cos\dfrac{5}{x}$





ვთქვათ f ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში. წრფეს, რომელიც გადის f ფუნქციის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე და რომლის საკუთხო კოეფიციენტი არის $f'(x_0)$ უწოდებენ f ფუნქციის გრაფიკის მხებს $(x_0, f(x_0))$ წერტილში. მაშასადამე მხების განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

მაგალითი 5. 4. ვიპოვოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის მხების განტოლება $x_0 = 1$ წერტილში.
ამოხსნა: რადგანაც $f'(1) = 2$, $f(1) = 1$, ამიტომ მხების განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს $f(x) - 1 = 2(x - 1)$, $f(x) = 2x - 1$.

რადგანაც

$$f'(0-)\neq f'(0+)$$

ამიტომ, თეორემა 5. 1-ის ძალით f ფუნქცია არ არის წარმოებადი 0 წერტილში.

მაგალითი 5. 11. განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=|x|$.

$$f'(0-)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-0}{x}=-1$$

$$f'(0+)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x\ \ -0}{x}=\lim_{x\to 0-}1=1.$$

რადგანაც

$$f'(0-)\neq f'(0+)$$

ამიტომ, თეორემა 5. 1-ის ძალით f ფუნქცია არ არის წარმოებადი 0 წერტილში.

მაგალითი 5. 12. ვთქვათ, $f(x)=x^{1/3}$ და გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წაროებული 0 წერტილში.

$$f'(0+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^{1/3}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h^{2/3}}=+\infty.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$f'(0-)=+\infty.$$

ე. ი.

$$f'(0)=+\infty.$$

მაგალითი 5. 13. ვთქვათ, $f(x)=x^{2/3}$. მაშინ

$$f'(0+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^{2/3}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h^{1/3}}=+\infty,$$

$$f'(0-)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h^{2/3}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h^{1/3}}=-\infty.$$

შენიშვნა 5. 2. იმ შემთხვევაში, როცა $f'(x_0+0)=\infty$ ან $f'(x_0-0)=\infty$, მაშინ x_0 წერტილზე გავლებული f ფუნქციის მხები oy ღერძის პარალელურია.

კავშირი ფუნქციის წარმოებადობისა და უწყვეტობის ცნებებს შორის

შენიშვნა. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ფუნქციის წარმოებული წერტილში შეიძლება იყოს როგორც სასრული რიცხვი ასევე უსასრულობა. ქვემოთ ყველგან ფუნქციის წარმოებულის ქვეშ ვიგულისხმებთ მხოლოდ სასრულ წარმოებულს.

თეორემა 5. 2. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. თუ f ფუნქცია წარმოებადია $x_0\in(a;b)$ წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია ამ წერტილში.

დამტკიცება. ვთქვათ, f ფუნქცია წარმოებადია $x_0\in(a;b)$ წერტილში, ე. ი. ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

მაშინ

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)+\lim_{x\to x_0} f(x_0)=f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0),$$

რაც გვაძლევს f ფუნქციის უწყვეტობას x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 5. 4. დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ წერტილში ფუნქციის უწყვეტობა ამ წერტილში წარმოებადობისათვის არის აუცილებელი პირობა, მაგრამ საზოგადოდ, წერტილში უწყვეტობა ამ წერტილში წარმოებადობისათვის არ არის საკმარისი პირობა, რასაც ადასტურებს მაგალითი 5. 10 და 5. 11.

შედეგი. 5. 1 თუ ფუნქცია წყვეტილია წერტილში, მაშინ ის წარმოებადი არ არის ამ წერტილში.

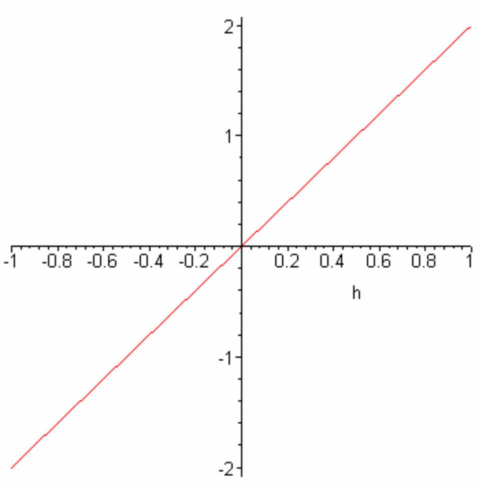
ფუნქციათა წრფივი კომბინაციის, ნამრავლის და ფარდობის წარმოებული

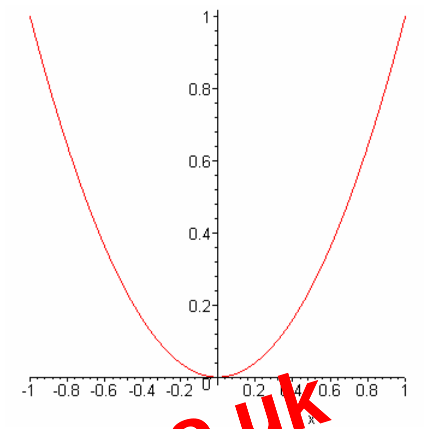
თეორემა 5. 3. მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია (იხ. მაგალითი 5. 6)

თეორემა 5. 4. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ და $g:(a;b)\to R$ ფუნქციები. თუ f და g ფუნქციები წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში, მაშინ წარმოებადია $x\in(a;b)$ წერტილში f და g ფუნქციების ჯამი და

$$\boxed{(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)};$$

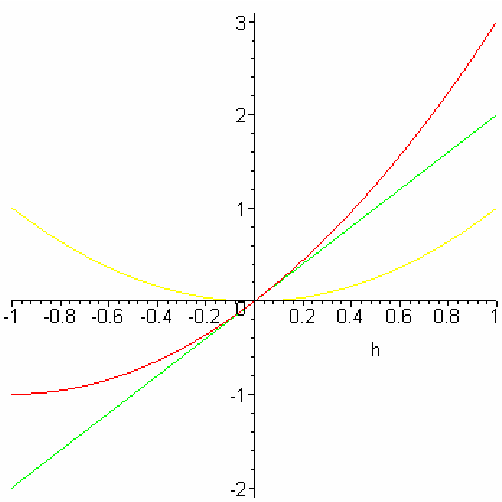
დამტკიცება. წარმოებულის განმარტების ძალით


2
1
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.2 0.4 0.6 0.8 1
h
-1
-2


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
x

$2h$

h^2


3
2
1
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
h
-1
-2

მაგალითი 5. 19. ვთქვათ $f(x)=|x|$. მაშინ ამ ფუქციის h ნაზრდს $x=0$ წერტილში ექნება შემდეგი სახე

$$f(h)-f(0)=|h|.$$

ვთქვათ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$|h|=Ah+\alpha(h),$$

სადაც

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$A=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, & h>0\\ -1, & h<0\end{cases}$$

ე. ი. A არ არის ცალსახად განსაზღრული.

განსაზღვრება 5. 3. ვთქვათ f ფუნქცია x წერტილის მიდამოში არის განსაზღრული. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია არის დიფერენცირებადი x წერტილში, თუ არსებობს A რიცხვი (x-ზე დამოკიდებული), ისეთი რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$f(x+h)-f(x)=Ah+\alpha(x;h), \tag{5}$$

სადაც

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(x;h)}{h}=0.$$

წარმოდგენა (5)-ში წრფივ ნაწილს უწოდებენ f ფუნქციის დიფერენციალს x წერტილში და აღნიშნავენ $df(x)$ სიმბოლოთი. ე. ი.

$$df(x)=Ah, \tag{6}$$

სადაც A x-ზე დამოკიდებული რიცხვია.

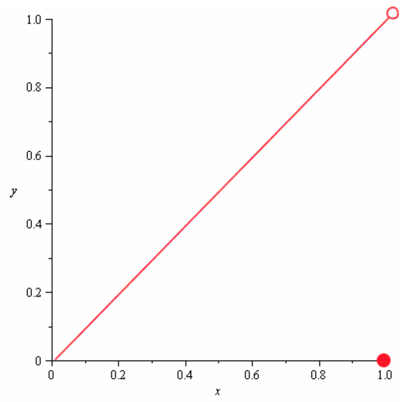
კავშირს დიფერენციალსა და წარმოებულს შორის ამყარებს შემდეგი

თეორემა 5. 9 . ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია. იმისათვის, რომ f ფუნქცია იყოს დიფერენცირებადი $x\in(a;b)$ წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მას ამ წერტილში ქონდეს სასრული წარმოებული.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, f ფუნქცია დიფერენცირებადია $x\in(a;b)$ წერტილში, მაშინ ადგილი აქვს (1) ტოლობას. ვიგულისხმოთ, რომ

ვთქვათ

$$f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<1 \\ 0, x=1 \end{cases}.$$



როლის თეორემის ყველა პირობა შესრულებულია გარდა 1)-სა და $f'(x)=1\ne 0, 0\le x<1$.

და ბოლოს, ფუნქცია $f(x)=x, x\in[0,1]$ აკმაყოფილებს როლის თეორემაში 1) და 2) პირობებს, მაგრამ $f'(x)=1\ne 0, 0\le x<1$.

ლაგრანჟის თეორემა

თეორემა 5. 12 (ლაგრანჟის). თუ $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქცია წარმოებადია (a,b) ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\varphi(x)=[f(x)-f(a)](b-a)-[f(b)-f(a)](x-a).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\varphi(a)=0, \qquad \varphi(b)=0$$

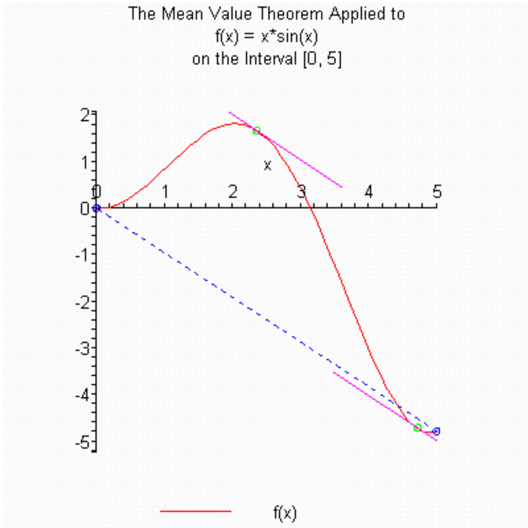
ამას გარდა φ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და წარმოებადია (a,b) ინტერვალში. ამრიგად φ ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და, მაშასადამე, (a,b) ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი x_0 წერტილი, რომ

$$\varphi'(x_0)=0.$$

შევნიშნოთ, რომ ასეთი წერტილები შეიძლება იყოს ერთზე მეტი.

მაგალითი 5. 22.

```
> with(Student[Calculus1]):
MeanValueTheorem(x*sin(x),0..5);
```

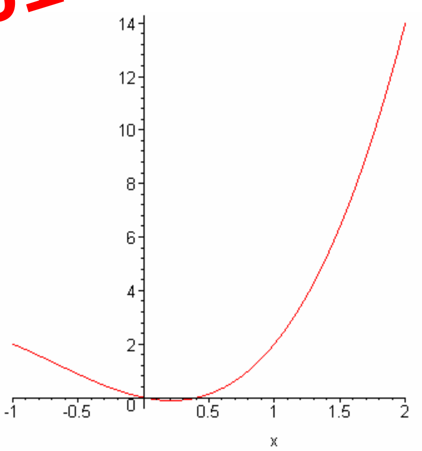


მაგალითი 5. 23. ვთქვათ $f(x)=x^3+2x^2-x, \quad a=-1, b=2$-თვის ვიპოვოთ x_0 წერილი, რომლისთვისაც $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$.

```
> f:=x->x^3+2*x^2-x;
```

$$f := x \to x^3 + 2x^2 - x$$

```
> plot(f(x),x=-1..2);
```




```
> g:=x->diff(f(x),x);
```

$$g := x \to \mathrm{diff}(f(x), x)$$

```
> g(c);
```

$$3c^2 + 4c - 1$$

```
> g(c)=(f(2)-f(-1))/(2-(-1));
```

$$3c^2 + 4c - 1 = 4$$

```
> solve(%,c);
```

$$-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{19}}{3}, -\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{19}}{3}$$

```
> evalf(-2/3+1/3*19^(1/2));
```

$$0.7862996483$$

```
> evalf(-2/3-1/3*19^(1/2));
```

$$-2.119632982$$

ვინაიდან -2.119632982 არ ეკუთვნის განსახილველ შუალედს, ამიტომ $x_0 \approx 0.7862996483$

გ) $y=\sqrt{5}\arccos x-\frac{1}{4}\arctan x-\tan x$;   დ) $y=4\arcsin x+6tgx-2arc\cot x$.

5. ა) $y=2^x-e^x-\log_2 x+\ln x$;   ბ) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-2\lg x+4\ln x-5$;

გ) $y=\frac{1}{e^x}-4^x-\ln x+\log_{\frac{1}{3}} x+5$;   დ) $y=7e^x-\log_5 x+\frac{6}{4^x}-5\ln x+8$.

6. ა) $y=x^2\sin x-e^x\cos x+2^x\tan x$;

ბ) $y=3x^5\ln x-4e^x\cot x-3\cos x\arctan x$;

გ) $y=6\sqrt[3]{x^4}\cdot\cos x-2\arcsin x\cdot\log_2 x-5x^9e^x$;

დ) $y=-3\sqrt[11]{x^6}\cdot\cot x-4\sin x\cdot\ln x+2^x\arccos x$.

7. ა) $y=\cos x\cdot e^x\cdot\log_2 x$;   ბ) $y=3x^5\tan x\cdot\cos x$;

გ) $y=2\sqrt{x^2}\cdot arc\cot x\cdot 5^x$;   დ) $y=\frac{3}{x^2}\arcsin x\cdot\ln x$.

8. ა) $y=\frac{2x^2-3x+1}{3x^4+x^2+2}-\frac{\cos x}{3+\sin x}$;   ბ) $y=\frac{3x^3-2x+5}{3x^2+x-1}+\frac{e^x}{\cos x-\ln x}$;

გ) $y=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2-x+4}-\frac{3^x-x^4}{\arccos x+5}$;   დ) $y=\frac{x^4-2x-4}{x+\sqrt{x}}-\frac{x+\lg x}{\cos x-e^x}$.

9. ა) $y=\frac{(x^2-2x)\sin x}{e^x(\cos x+x^3)}$;   ბ) $y=\frac{(3x^4-2x)\tan x}{2^x(\arcsin x+4)}$;

გ) $y=\frac{(\sqrt[4]{x}+3)\ln x}{(x^2-\cot x)3^x}$;   დ) $y=\frac{(2x^3-\sqrt{x})e^x}{x^2\tan x}$.

გამოიყენეთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი და იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის წარმოებული:

1. ა) $y=(2x+1)^{10}-5\cos^2 x$;   ბ) $y=(3x^2-x)^{20}+\sin^2 x$;

გ) $y=(x^3-4x^2)^8-\tan^4 x$;   დ) $y=(2x-\sqrt{x})^4-3\cot^9 x$.

2. ა) $y=\sin^3 x\cos 2x-e^{4x}\lg(3x)$;   ბ) $y=\sin^5 x\tan 4x-2^{3x^2}\ln(3x)$;

გ) $y=\cos^3 3x\sin 6x-5\ln(2x+3)\cot x^2$;   დ) $y=\arcsin^2 x\cdot\cos 4x-e^{2x-3}\ln(2x+3)$.

3. ა) $y=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$;   ბ) $y=y=\lg^3 x-\ln\frac{x}{3}$;

გ) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$;   დ) $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$;

4. ა) $y=\sin(\sin 3x)$;   ბ) $y=\sin(\cos^2(\tan^3 x))$;

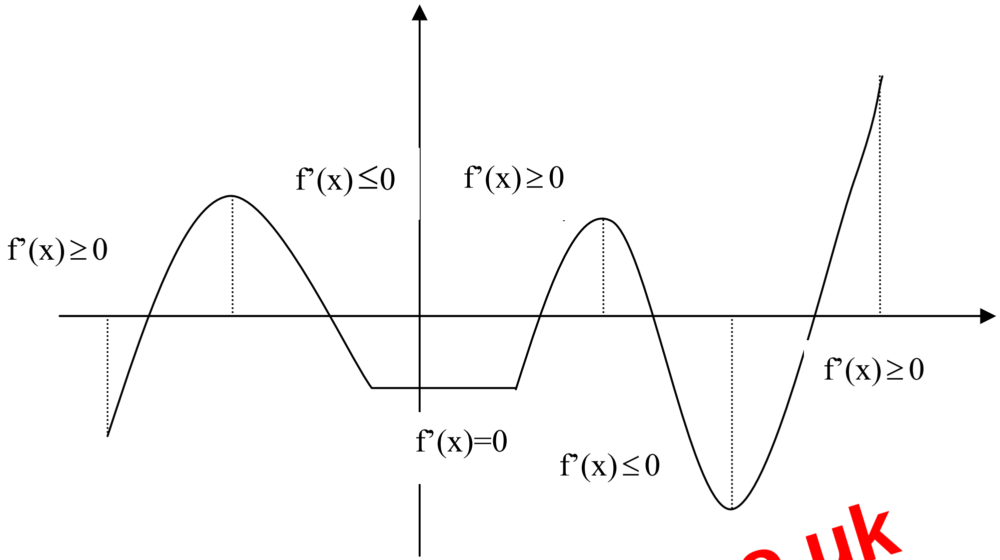
გ) $y=\ln(\ln(\ln x))$;   დ) $y=\arctan(\tan^2 x)$.

გააწარმოეთ ფუნქცია:

1. ა) $y=x^x$;   ბ) $y=(x-1)^{2x}$;

გ) $y=(\cos x)^x$;   დ) $y=(\ln x)^{x+1}$.

შენიშვნა. $f(x)=x^3$ ფუნქციის მაგალითით ჩანს, რომ რაიმე ინტერვალზე წარმოებადი ფუნქციის ზრდადობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს ამ ინტერვალზე ფუნქციის წარმოებულის დადებითობა. მართლაც, $f(x)=x^3$ ფუნქცია ზრდადია (-1;1) ინტერვალზე, მაგრამ $f'(0)=3\cdot 0^2=0$, ე. ი. $f'(x)\ge 0$, როცა $x\in(-1;1)$.



მაგალითი 5. 31. ფუნქცია $f(x)=x^3-3x+2$. მაშინ $f'(x)=3x^2-3$. რადგან $(-\infty;-1)$ ინტერვალზე $f'(x)>0$, ამიტომ ფუნქცია ამ ინტერვალზე ზრდადია; რადგან $(-1;1)$ ინტერვალზე $f'(x)<0$, ამიტომ ფუნქცია ამ ინტერვალზე კლებადია, რადგან $(1;+\infty)$ ინტერვალზე $f'(x)>0$, ამიტომ ფუნქცია ამ ინტერვალზე ზრდადია.

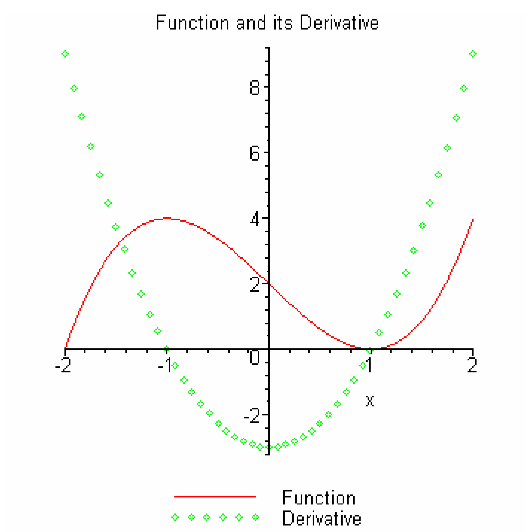

```
> f:=x^3-3*x+2;
```

$$f := x^3 - 3\,x + 2$$

```
> g:=diff(f,x);
```

$$g := 3\,x^2 - 3$$

```
> plot([f,g],x=-2..2,title="Function and its Derivative",style=[LINE,POINT],legend=["Function","Derivative"]);
```

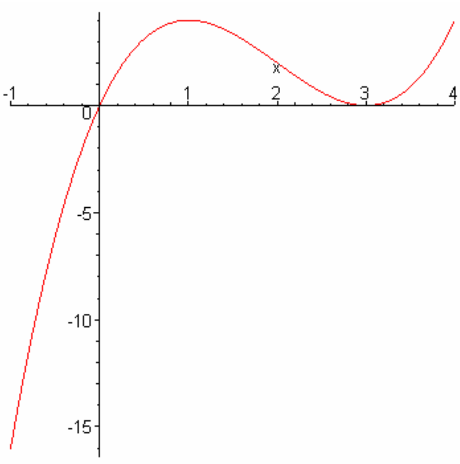


მაგალითი 5. 34. იპოვეთ $f(x)=x^3-6x^2+9x$ ფუნქციის აბსოლუტური ექსტრემუმები $[-1;4]$ სეგმენტზე.

```
> f:=x^3-6*x^2+9*x;
```

$$f := x^3 - 6\,x^2 + 9\,x$$

```
> plot(f,x=-1..4);
```




```
> diff(f,x);
```

$$3\,x^2 - 12\,x + 9$$

```
> solve(%,x);
```

$$3,\ 1$$

```
> x:=-1:
> f;
```

$$-16$$

```
> x:=1:
> f;
```

$$4$$

```
> x:=3:
> f;
```

$$0$$

```
> x:=4:
> f;
```

$$4$$

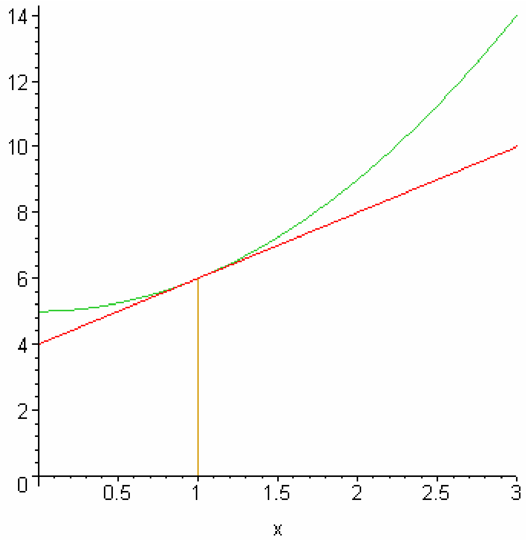
```
> "AbsMax=4, when x=1 or x=4":
> "AbsMin=-16, when x=-1 ":
>
```


ფუნქციის ამოზნექილობის დადგენა წარმოებულის გამოყენებით, გადაღუნვის წერტილები

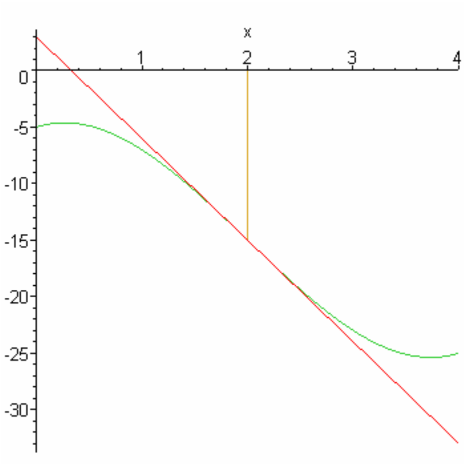
განსაზღვრება 5. 6. ვთქვათ, მოცემულია $f:(a;b)\to R$ ფუნქცია, რომელიც წარმოებადია $(a;b)$ ინტერვალზე. f ფუნქციას ეწოდება ამოზნექილი ქვემოდან $(a;b)$ ინტერვალზე, თუ ფუნქციის გრაფიკის ყოველი წერტილი იქნება გრაფიკის ნებისმიერ წერტილში გავლებული მხების ზემოთ.

ნახაზზე გამოსახულია ქვემოდან ამოზნექილი ფუნქციის გრაფიკი:

```
> with(student):
> showtangent(x^2+5,x=1,x=0..3);
```

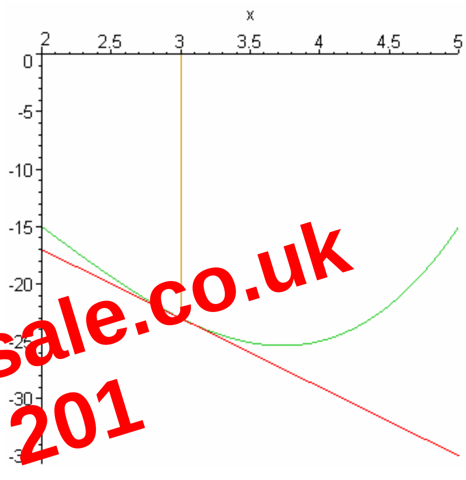


```
> with(student):
> showtangent(f(x),x=2,x=0..4);
```




```
> with(student):
> showtangent(f(x),x=3,x=2..5);

>
```



ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

განსაზღვრება. 5. 8 $x = x_0$ წრფეს უწოდებენ f ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალურ ასიმპტოტას, თუ

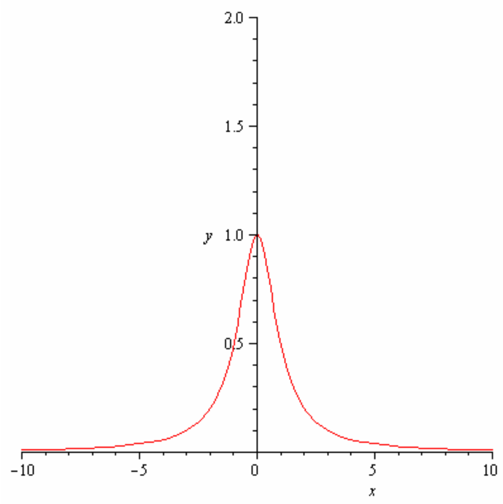
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ან} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty .$$

შევნიშნოთ, რომ ვერტიკალური ასიმპტოტები არ შეიძლება ჰქონდეს უწყვეტ ფუნქციის გრაფიკს. ასეთი ასიმპტოტები შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ისეთ ფუნქციის გრაფიკს, რომელსაც აქვს მეორე გვარის წყვეტის წერილები.

მაგალითი 5. 36. ვთქვათ, $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $\lim\limits_{x \to 3-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ და $\lim\limits_{x \to 3+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$. ამიტომ $x = 3$ მოცემული ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0\,.$$

მაშასადამე ფუნქციას გააჩნია ჰორიზონტალური ასიმპტოტი და ეს არის $y=0$ წრფე.



მაგალითი 5. 39. პროგრამა MAPLE-ის გამოყენებით ვიპოვოთ $f(x)=\frac{x^3}{x^2-3}$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-}\frac{x^3}{x^2-3}$$

$$-\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+}\frac{x^3}{x^2-3}$$

$$\infty$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-}\frac{x^3}{x^2-3}$$

$$-\infty$$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ექსტრემუმები:

ა) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+1$;

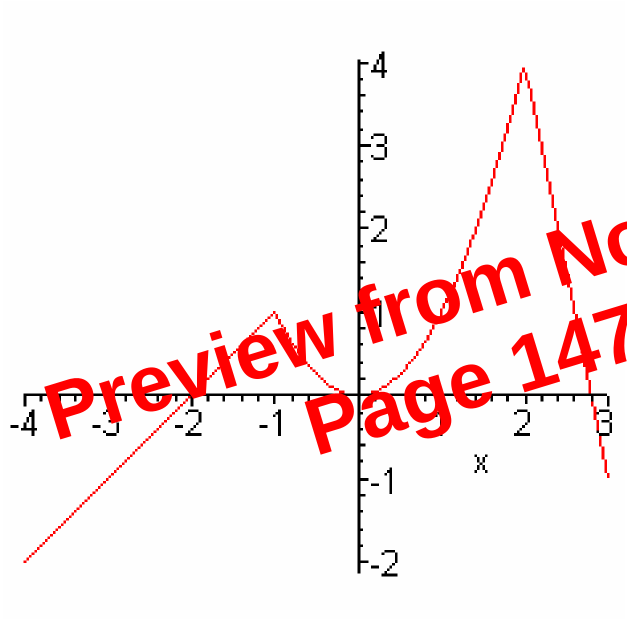
ბ) $f(x)=x^3-\frac{15}{2}x^2+18x-9$.

გ) $f(x)=3x^4-6x^2+4$;

დ) $f(x)=x^2-\frac{1}{2}x^4+2$;

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ლოკალური და გლობალური ექსტრემუმები:

ა) $$f(x)=\begin{cases} x+2, & -4\le x\le -1,\\ x^2, & -1<x\le 2,\\ -5x+14, & 2<x\le 3.\end{cases}$$



ბ) $$f(x)=\begin{cases} (x+2)^2, & -4\le x<-1,\\ -x, & -1<x<1,\\ -(x-2)^2, & 1<x\le 4.\end{cases}$$

გ) $$f(x)=\begin{cases} -2x-8, & -3\le x<-2,\\ -x^2, & -2<x\le 2,\\ 5x-14, & 2<x\le 3.\end{cases}$$

$$|1-a|<\frac{1}{2} \text{ და } |-1-a|<\frac{1}{2}.$$

მაშინ გვექნება $2=|(1-a)-(-1-a)|\le|1-a|+|-1-a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. ე.ი. 2<1, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, მოცემულ მიმდევრობას ზღვარი არა აქვს.

მოვიყვანოთ აღნიშნული ფაქტის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:

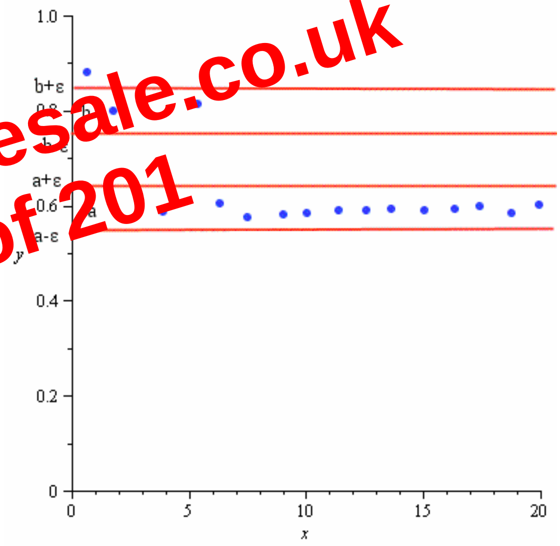
8) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=+\infty$, ვინაიდან $n^2>M$, როცა $n>N=[\sqrt{M}]+1$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3)=-\infty$, ვინაიდან $-n^3<-M$, როცა $n>N=[\sqrt[3]{M}]+1$.

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot n=\infty$, ვინაიდან $|(-1)^n n|>M$, როცა $n>N=[M]$

თეორემა 6. 1. ყოველ კრებად მიმდევრობას აქვს ერთადერთი ზღვარი.

დამტკიცება. მოვიყვანოთ დამტკიცების გეომეტრიული ვარიანტი: ვთქვათ, $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ. ავიღოთ a რიცხვისგან განსხვავებული რაიმე b რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ b არ შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის ზღვარი.

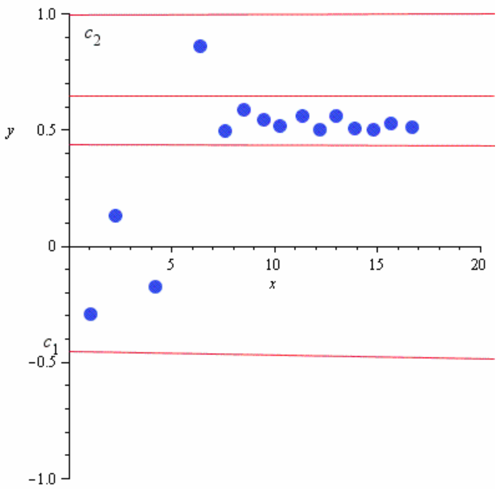


ვთქვათ, $\varepsilon\in(0,\frac{b-a}{2})$, $b>a$.

მაშინ, როგორც ნახაზიდან ჩანს, როცა $n>N$, $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობის წევრები ჩავარდებიან a რიცხვის $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ მიდამოში. ამიტომ მიმდევრობის რომელიღაც ნომრიდან დაწყებული ვერცერთი წევრი ვერ ჩავარდება b რიცხვის $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ მიდამოში.

თეორემა 6. 2. ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. მაშინ $\varepsilon=1$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი N რიცხვი, რომ როცა $n>N$, მაშინ $|x_n-a|<1$.



როგორც ნახაზზე ჩანს , მითითებული ზოლის გარეთ რჩება $(x_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობის მხოლოდ სასრული რაოდენობის წევრები, ამიტომ არსებობს ისეთი c_1 და c_2 რიცხვები, რომ შესრულდება $c_1<x_n<c_2$ უტოლობა ყველა n-

ვთქვათ, $(x_n)_{n\ge1}$ და $(y_n)_{n\ge1}$ ორი უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა. ამბობენ, რომ $(x_n)_{n\ge1}$ და $(y_n)_{n\ge1}$ ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებია, თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=1$ და წერენ: $(x_n)_{n\ge1} \approx (y_n)_{n\ge1}$

ვთქვათ, $(x_n)_{n\ge1}$ და $(y_n)_{n\ge1}$ ორი უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა. თუ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=1$, მაშინ $(x_n)_{n\ge1}$ და $(y_n)_{n\ge1}$ მიმდევრობებს ეკვივალენტური უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები ეწოდება.

მაგალითები 1. $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to}\frac{1}{n}=0$

$(y_n)_{n\ge1}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{1+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

ე.ი. $(x_n)_{n\ge1} \approx (y_n)_{n\ge1}$

2. $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=n^2+1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)=+\infty$

$(y_n)_{n\ge1}$, $y_n=n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$$

ე.ი. $(x_n)_{n\ge1} \approx (y_n)_{n\ge1}$

ზოგიერთი მიმდევრობის ზღვარი:

1. $(x_n)_{n\ge1}$, $x_n=\sqrt[n]{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2. $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx2{,}7$ – ნეპერის რიცხვი

3. $x_n=(q)^n$, $q>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=+\infty$

4. $x_n=q^n$, $0<q<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

დამტკიცება. რადგანაც $\log x_n=\frac{\log n}{n}$ და $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, ამიტომ თეორემა 6. 7-ის ძალით $\lim\limits_{n\to\infty}\log x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$. თუ გამოვიყენებთ ლოგარითმული ფუნქციის უწყვეტობას, მივიღებთ $\log\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

$$S_1 = x_1$$
$$S_2 = x_1 + x_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$\vdots$$

ყოველ $n\,(n \in N)$ რიცხვს შეესაბამება (6. 1) მწკრივის n-ური კერძო ჯამი S_n. ამგვარად, მიიღება (6. 1) მწკრივის შესაბამისი n-ური კერძო ჯამების $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა.

ამბობენ, რომ (6. 1) მწკრივი კრებადია და S არის მისი ჯამი, თუ კრებადია მისი კერძო ჯამების $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა და $\lim S_n = S$. ასეთ შემთხვევაში წერენ

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

იმ შემთხვევაში, როცა $(S_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობა განშლადია, (6. 1) მწკრივს განშლადი მწკრივი ეწოდება.

თეორემა 6. 9. თუ (6. 1) მწკრივი კრებადია, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ მწკრივის $(S_n)_{n\geq 1}$ კერძო ჯამთა მიმდევრობა კრებადია. მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითები 6. 17. განვიხილოთ მწკრივი

$$a + a + \ldots + a + \ldots$$

თუ $a = 0$, მაშინ ყოველი n-თვის $S_n = 0$ და $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. ამ შემთხვევაში მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი $S = 0$. როცა $a \neq 0$, პირობა $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ არაა შესრულებული და ამიტომ თეორემა (6. 9)-ის თანახმად, ეს მწკრივი განშლადია.

მაგალითები 6. 18. განვიხილოთ მწკრივი, რომლისთვისაც $x_n = (-1)^n$. მას ასეთი სახე აქვს:

$$(-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^n + \cdots +$$

აქ პირობა $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ არაა შესრულებული და ამიტომ მწკრივი განშლადია.

მაგალითები 6. 19. განვიხილოთ რაიმე a და q რიცხვები $(a \neq 0)$ და შევადგინოთ მწკრივი

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \qquad (6.\ 2)$$

ე.ი. აქ $x_n = aq^{n-1}$.

თუ $|q| \geq 1$, მაშინ $|x_n| = |aq^{n-1}| = |a||q|^{n-1} \geq |a| > 0$, ნებისმიერი $n \in N$-სთვის. ამიტომ პირობა $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ არაა შესრულებული, რაც ამტკიცებს, რომ (2) მწკრივი განშლადია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $|q| < 1$. მაშინ

2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$

3. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$

4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$

6. დალამბერის ან კოშის ნიშნის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა

1. $\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots,$

სადაც a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია

2. $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{2^n\cdot n!}{n^n}+\cdots$

3. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\cdots$

4. $\frac{1}{3}+\frac{2^2}{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{3^2}{\left(2+\frac{1}{3}\right)^3}+\cdots+\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}+\cdots$

7. გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა და აბსოლუტურად კრებადობა

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n},$

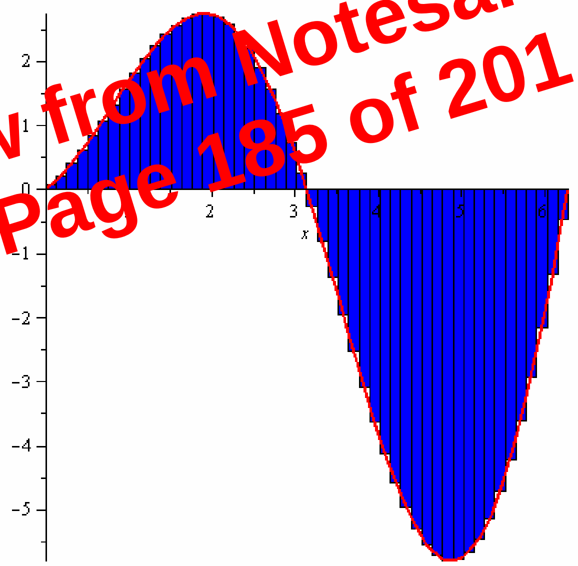
სადაც x რაიმე რიცხვია და $x\in R\setminus Z$

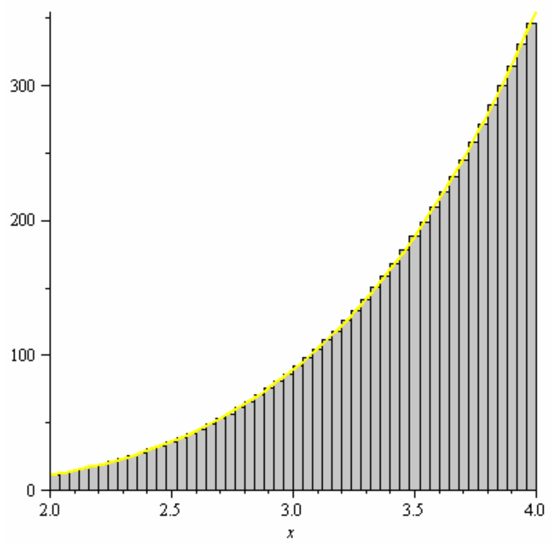
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$

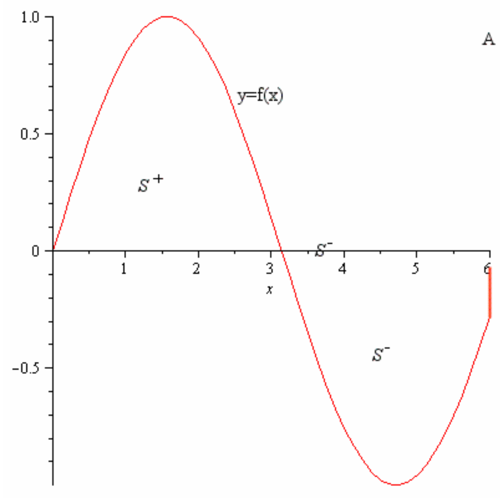
```
with(student) :
middlebox(x^4*ln(x), x = 2 ..4, 50 , color= YELLOW);
middlebox(sin(x) *x + sin(x), x = 0 ..2*Pi, 50, shading= BLUE);
```



ვთქვათ f ფუნქცია ნიშანს არ ინარჩუნებს. მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = S^+ - S^- .$$



რიმანის ინტეგრალის თვისებები

თვისება 1.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

მართლაც, თუ $a=b$, მაშინ $\Delta x_i = 0$ და მაშასადამე $L(f,P)=U(f,P)=0=I$.

თვისება 2. ვთქვათ, $a>b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

თვისება 3.

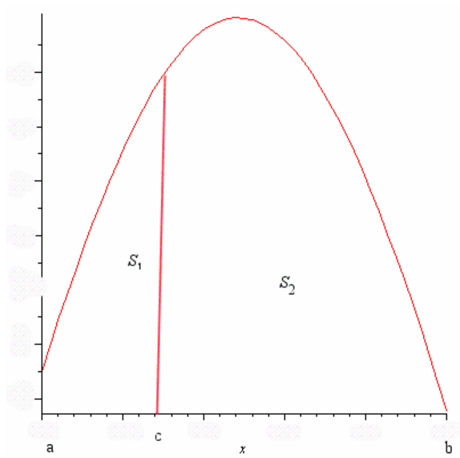
$$\int_a^b (Af(x)+Bg(x))dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx .$$

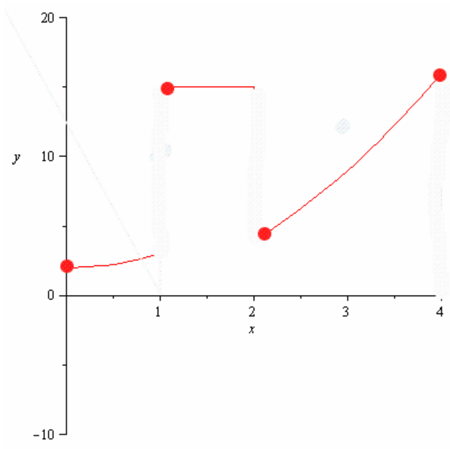
თვისება 4. ვთქვათ, $a<c<b$. მაშინ

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

მართლაც

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$





განსაზღვრება 7. 4. ვთქვათ, f უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა $[c_0,c_n]$ სეგმენტზე. მაშინ f ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[c_0,c_n]$ სეგმენტზე განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)\,dx .$$

შენიშვნა 7. 1. როგორც ზემოთ ვნახეთ, სეგმენტზე უწყვეტი ან უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია. რაც შეეხება შემოსაზღვრულობას, ის არის მხოლოდ აუცილებელი პირობა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყველა შემოსაზღვრული ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი.

კალკულუსის ძირითადი თეორემები

თეორემა 7. 2 (ძირითადი თეორემა I) ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე და $a\le x\le b$. განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt .$$

მაშინ F წარმოებადია $[a,b]$ სეგმენტზე და ადგილი აქვს ტოლობას

გ) $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$;   დ) $\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

5. ა) $\int (2\sin x+3\cos x-5)dx$;   ბ) $\int (\frac{5}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+2)dx$;

   გ) $\int \tan^2 xdx$;   დ) $\int \cot^2 xdx$.

6. ა) $\int (\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})dx$;   ბ) $\int (\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{3}{2x^2-2})dx$;

   გ) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$;   დ) $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$.

7. ა) $\int (e^x-2^x)dx$;   ბ) $\int (2^{2x}+e^{3x})dx$;

   გ) $\int \frac{2^{x+2}-3^{x-2}}{6^x}dx$;   დ) $\int (2^x+3^x)^2\,dx$.

იპოვეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალი ცვლადის გარდაქმნის გზით:

1. ა) $\int (2x-1)^{20}\,dx$;   ბ) $\int (\frac{1}{3}x-5)^{10}\,dx$;

   გ) $\int \sqrt{3x-2}dx$;   დ) $\int \sqrt[3]{4x-2}dx$.

2. ა) $\int \frac{1}{\sqrt{2-9x^2}}dx$;   ბ) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$;

   გ) $\int \frac{1}{2-3x^2}dx$;   დ) $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx$.

3. ა) $\int (\cos 2x-\sin(3x+2))dx$;   ბ) $\int (\frac{4}{\cos^2(4x-3)}+\frac{1}{1-\cos x})dx$;

   გ) $\int (\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{2x^2+1})dx$;   დ) $\int (\sin^4 x-\cos^4 x)dx$.

4. ა) $\int \tan xdx$;   ბ) $\int \cot xdx$;

   გ) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$;   დ) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

5. ა) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;   ბ) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$;

   გ) $\int \frac{x^3dx}{x^8-5}$;   დ) $\int \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

6. ა) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$;   ბ) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;

   გ) $\int \frac{dx}{\sin x}$;   დ) $\int \frac{dx}{\cos x}$;

7. ა) $\int x(1-x)^{50}\,dx$;   ბ) $\int x\sqrt{3-4x}dx$;

   გ) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$;   დ) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$.