

Il est facile de déterminer la probabilité d'un événement $G \in \mathcal{F}$.

$$P(G) = \sum_{j: \omega_j \in G} \frac{1}{r} = \frac{\#G}{r} = \frac{\#G}{\#\Omega}$$

On retient souvent cette formule sous la forme :

$$P(G) = \frac{\#G}{\#\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables pour } G}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Le calcul de $P(G)$ se ramène donc au problème de compter (ou dénombrer) le nombre d'éléments de G et le nombre d'éléments de Ω .

Exemples:

a) On lance une pièce de monnaie équitale deux fois de suite. Quelle est la probabilité que les deux résultats soient identiques? Dans ce cas, $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ Et $\#\Omega = 4$. Soit G l'événement qui correspond à -les deux résultats sont identiques-, c'est-à-dire $G = \{(P, P), (F, F)\}$. Clairement, $\#G = 2$ et donc en admettant que les quatre résultats élémentaires sont équiprobables,

$$P(G) = \frac{\#G}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une paire ? Dans ce cas, la valeur de $\#\Omega$ ne peut être déterminée par énumération, car le nombre de mains de 5 cartes est trop grand. En fait, nous avons que $\#\Omega = 2598960$ et que $\#$ "avoir une paire" = 1098240

Donc $P(1 \text{ paire}) = 0.422569$.

3. Variable aléatoire et son espérance

3.1. Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Une *variable aléatoire* est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

Remarques :

- Pour simplifier l'écriture, on écrit souvent $\{X \leq x\}$ au lieu de $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$.
- On s'intéresse à la probabilité de $\{X \leq x\}$, il faut que cet ensemble appartienne à $\mathcal{F}$, le domaine de définition de probabilité P . Le cas particulier où $\mathcal{F} = P(\Omega)$, toute fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire.
- Une variable aléatoire qui ne prend qu'une seule valeur $x_0 \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire telle que $P\{X=x_0\} = 1$, est appelée une variable aléatoire déterministe.

Exemples :

- 1) On joue deux fois de suite à pile ou face. Notre univers est $\Omega = \{pp, pf, fp, ff\}$ (l'ordre des lancers est pris en compte). Le nombre d'apparitions de pile est la variable aléatoire suivante :

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{Si } \omega = ff \\ 1, & \text{Si } \omega \in \{pf, fp\} \\ 2, & \text{Si } \omega = pp \end{cases}$$

- 2) on jette un dé n fois. Soit X le nombre de fois que le résultat est 6. Pour décrire cette situation, on pose $\Omega = (1, \dots, 6)^n$, $\mathcal{F} = P(\Omega)$, et on définit $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ de telle sorte que tous les événements élémentaires sont équiprobables. Les éléments de Ω sont notés $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, où ω_i est le résultat du i ème jet. La variable aléatoire X est la fonction définie par :

On observera que le nombre $\mathbb{E}[Y|X = x]$ est l'espérance de la variable aléatoire Y sous la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

b) Plus généralement, pour $F \in \mathcal{F}$ tel que $P(F) \neq 0$, posons :

$$\mathbb{E}[Y|X = x] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_y y P(Y = y | F) = \frac{1}{P(F)} \sum_y y P(\{Y = y\} \cap F).$$

Proposition 5

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes dans $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathbb{E}[Y|X = x] & \text{si } P\{X = x\} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci définit une fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. L'espérance conditionnelle de Y sachant X est alors la variable aléatoire $\mathbb{E}[Y|X = x]$.

Démonstration :

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Il suffit de vérifier l'égalité (3). Celle-ci s'écrit :

$$\sum_x \sum_y y g(x) P\{X = x, Y = y\} = \sum_x \varphi(x) g(x) P\{X = x\}.$$

Ou encore.

$$\sum_x g(x) (P\{X = x, Y = y\}) = \sum_x g(x) \varphi(x) P\{X = x\}.$$

Ceci est une conséquence du fait que Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $P\{X = x\} \neq 0$,

$$\varphi(x) P\{X = x\} = \mathbb{E}[Y|X = x] P\{X = x\} = \sum_y y P\{X = x, Y = y\}.$$

Formule pour $\mathbb{E}[Y|X]$ dans le cas continu :

Définition 2 : (densité conditionnelle) :

L'état 3 : $\text{pgcd} \{n \in \mathbb{N}, P_{33}^{(n)} > 0\} = 3$.

2 et 3 sont **périodique** et l'état 1 **apériodique**.

5.5. Temps d'arrêt et propriété de Markov :

1. Propriété de Markov faible :

On suppose toujours E dénombrable. La définition d'une chaîne de Markov implique que la distribution du processus après le temps n , sachant qu'il est en $i_n \in E$ au temps n , est la même que celle du processus après le temps 0 sachant qu'il est en i_n au temps 0. Cette propriété, appelée propriété de Markov faible.

Proposition :

Pour tout $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in E^{n+1}$ tel que $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0$ et toute fonction mesurable $g : E^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\ = \mathbb{E}(g(X_0, X_{n-1}, \dots, X_1) | X_0 = i_n). \end{aligned}$$

Ou de manière équivalente.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0) | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\ = \mathbb{E}_{i_n}(g(X_0), g(X_1), \dots). \end{aligned}$$

Où :

$$\mathbb{E}_{X_n}(g(X_0), g(X_1), \dots) = h(X_n) \text{ et } h(x) = \mathbb{E}_x(g(X_0), g(X_1), \dots).$$

Est-ce que la propriété de Markov faible reste-t-elle vraie en général si n est aléatoire ?

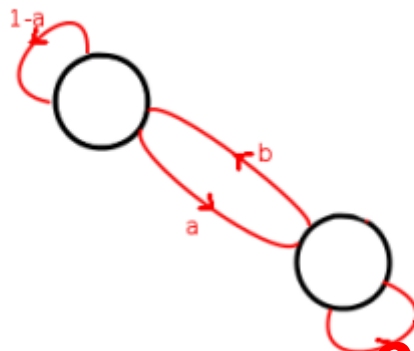
Non, cette réponse nous conduira à la définition de temps d'arrêt.

2. Temps d'arrêt :

Un temps d'arrêt T pour une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est un temps aléatoire qui ne dépend que du passé de la chaîne. En d'autres termes, à

Remarques

- Si ν est invariante, alors ν vérifie $\nu P^n = \nu$ pour tout $n \geq 0$.
- Si ν est invariante pour P , alors $\lambda \nu$ est aussi invariante pour P , quelque soit $\lambda \in]0, +\infty]$.
- Les mesures invariantes de P sont exactement ses vecteurs propres à gauche strictement positifs, de valeur propre associée 1.



« Graphes d'une chaîne de Markov à deux états, où $a, b \in]0, 1[$ »

- Rappelons que pour toute mesure de probabilité ν , νP est la loi de X_1 sous la probabilité $\mathbb{P}_\nu$. Ainsi, ν est invariante pour P si et seulement si ν est la loi de X_1 sous $\mathbb{P}_\nu$. Dans ce cas, pour tout $n \geq 0$, ν est la loi de X_n sous $\mathbb{P}_\nu$ (qui n'est autre que $\nu P^n = \nu$). C'est cette propriété qui justifiera par la suite l'appellation (abusiv) "mesure invariante pour X ".

Propositions :

- Si ν est une probabilité invariante pour la probabilité de transition P , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{N}$, les $(n+1)$ -uplets $(X_r, X_{r+1}, \dots, X_{r+n})$ et $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ ont la même loi sous $\mathbb{P}_\nu$.
- Soit ν une mesure invariante finie pour P . Alors tout point $x \in E$ tel que $\nu(\{x\}) > 0$ est récurrent. Par contraposée, tout point transitoire $x \in E$ vérifie $\nu(\{x\}) = 0$.

Démonstration :

On peut supposer que ν est une mesure de probabilité. Dans ce cas, νP^n est la loi de X_n sous $\mathbb{P}_\nu$. Mais $x \in E$ est transitoire, donc, pour tout $y \in E$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\nu P^n)_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_y(X_n = x) = 0$. Puisque ν est une mesure finie, on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\nu P^n)_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\nu(X_n = x) = 0.$$

Or ν étant invariante, on a $\nu P^n = \nu$ pour tout n . Par conséquent,

$$\nu(\{x\}) = 0.$$

Exemple :

Supposons E fini et considérons $x \in E$. On suppose que, pour tout $y \in E$, la suite $([P^n]_{x,y})_{n \geq 0}$ converge. Montrer que la mesure ν définie par.

$$\nu(\{y\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [P^n]_{x,y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(X_n = y)$$

Est une probabilité invariante sur E pour la matrice de probabilité de transition P .

Supposons que la suite de vecteurs $([P^n]_{x,\cdot})_{n \geq 0}$ converge. Dans ce cas, le vecteur $[P^n]_{x,\cdot}$ converge dans l'ensemble fermé des mesures de probabilité sur E (noté $\mathcal{M}_1(E)$) vers ν (qui est donc une mesure de probabilité).

De plus, $\mu \rightarrow \mu P$ est une fonction continue sur $\mathcal{M}_1(E)$, donc on a :

$$\nu P = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} [P^n]_{x,\cdot} \right) P = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} [P^n]_{x,\cdot} P \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} [P^{n+1}]_{x,\cdot} \right) = \nu.$$

Définition :

On dit qu'une chaîne de Markov $(X_n)_n$ est irréductible si, pour tout $x, y \in E$, $\exists n \geq 0$ tel que $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$.

Remarque :

- Si une chaîne est irréductible, alors ses points sont soit tous récurrents, soit tous transitoires.
- Si la chaîne de Markov homogène X est irréductible transitoire, alors elle n'admet aucune mesure invariante de masse finie.

- Si la chaîne de Markov homogène X est irréductible récurrente, alors elle admet une unique mesure invariante à constante multiplicative près. De plus cette mesure invariante est de masse finie si $\mathbb{E}_x(T_x) < +\infty$, de masse infinie $\mathbb{E}_x(T_x) = +\infty$ si pour un $x \in E$ (auquel cas cela est vrai pour tout $x \in E$).
- Si E est fini et X est irréductible, alors c'est le premier cas qui s'applique.

Définition :

Une chaîne de Markov est dite irréductible récurrente positive si elle admet une mesure invariante positive de mesure finie. Elle est dite nulle dans le cas contraire.

Théorèmes ergodiques :

Supposons que X est irréductible récurrente et soit ν une mesure invariante et à valeurs finies de la chaîne.

Pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ν -intégrable ou positive, on a pour tout $x \in E$.

$$\frac{\sum_{i=0}^n f(X_i)}{\sum_{i=0}^n 1_{X_i=x}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}_x \text{ p.s.}} \frac{1}{\nu(\{x\})} \int_E f d\nu$$

Corollaires

Supposons que X est irréductible récurrente. Alors

1. Si X est irréductible récurrente positive de probabilité invariante ν , alors, pour tout $x \in E$.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n 1_{X_i=x} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}_x \text{ p.s.}} \frac{1}{\nu(\{x\})}.$$

Et, plus généralement, pour toute fonction f ν -intégrable ou positive,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n f(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}_x \text{ p.s.}} \int_E f d\nu.$$

2. Si X est irréductible récurrente nulle, alors