Par le changement de variable $u = 1/t$

$$\int_{1/N}^{1} t\,[1/t]\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{N} \frac{[u]}{u^3}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{N}\int_{k}^{k+1}\frac{k}{u^3}\,\mathrm{d}u$$

puis

$$\int_{1/N}^{1} t\,[1/t]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}$$

et l'on remarque que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k^2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{12}$$

En choisissant N assez grand pour que $1/N \le \varepsilon$ et $\frac{1}{2}\sum_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\le\varepsilon$, on a

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right| \le \varepsilon + \frac{n-[n/N]}{n}\left(\frac{1}{n-[n/N]}\sum_{k=[n/N+1]}^{N}\frac{k}{n}\left[\frac{n}{k}\right]-\frac{\pi^2}{12}\right)+\frac{[n/N]}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

Puis pour n assez grand

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right| \le \varepsilon + \frac{n-[n/N]}{n}\left(\sum_{k=N+2}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\varepsilon\right)+\frac{[n/N]}{n}\frac{\pi^2}{12}$$

ce qui donne

$$\left|v_n-\frac{\pi^2}{12}\right| \le \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon\frac{\pi^2}{12}$$

Finalement $v_n \to \pi^2/12$ puis $u_n \to 1-\pi^2/12$

Exercice 9 : [énoncé]

a) Par somme de Riemann

$$\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$$

b) Par somme de Riemann

$$\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p^\alpha} = n^{1-\alpha}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^\alpha} \to 0\times\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^\alpha} = 0$$

c) Sachant pour $x > 0$

$$x-\frac{x^3}{6}\le \sin x \le x$$

on obtient

$$\left|\sum_{p=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{p}\right)-\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}\right| \le \frac{1}{6}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p^3}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{p}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p} = \ln 2$$

Exercice 10 : [énoncé]

a) Les deux polynômes de l'égalité sont unitaires, de degré $2n$ et ont pour racines les racines $2n$-ième de l'unité car les racines du polynôme $X^2-2X\cos(k\pi/n)+1$ sont les $\mathrm{e}^{\pm ik\pi/2n}$.

b) Par les sommes de Riemann,

$$\int_0^\pi \ln(a^2-2a\cos t+1)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(a^2-2a\cos\frac{k\pi}{n}+1)$$

Or

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln(a^2-2a\cos\frac{k\pi}{n}+1) = \frac{\pi}{n}\ln\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}$$

Si $|a|<1$ alors $\frac{\pi}{n}\ln\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}\to 0$ et donc

$$\int_0^\pi \ln(a^2-2a\cos t+1)\,\mathrm{d}t = 0$$

Si $|a|>1$ alors $\frac{\pi}{n}\ln\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}\to 2\pi\ln|a|$ et donc

$$\int_0^\pi \ln(a^2-2a\cos t+1)\,\mathrm{d}t = 2\pi\ln|a|$$