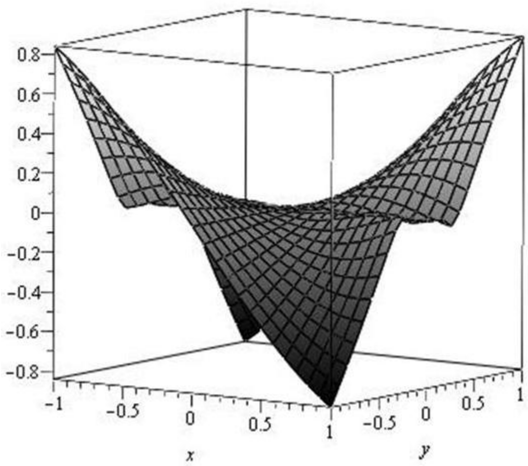
Exemple 18 *Etudions la différentiabilité de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\frac{x}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$



(Surface d'équation $z=f(x,y)$*)*

La fonction f *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(a,0)\}$, $a\in\mathbb{R}$ *comme produit et composée de fonctions différentiables. On a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos\frac{x}{y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\frac{x}{y}-x\cos\frac{x}{y},$$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. *En outre,* $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leq|y|$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est continue en* $(0,0)$. *Donc la fonction* f *est différentiable en* $(0,0)$. *De même, la fonction* f *est différentiable en* $(a,0)$, $a\neq 0$ *car* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *existent au point* $(a,0)$ *;* $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)=0$, *et* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est continue en* $(a,0)$ *;*

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(a,0).$$

(Notons que pour ce dernier cas, si $a\neq 0$, *la dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *n'est pas continue en* $(a,0)$ *puisque* $\lim_{(x,y)\to(a,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *n'existe pas). Finalement* f *est*

Exercice 3.4 *Etudier la continuité et la différentiabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^4 x}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>*Réponse*</u> : En utilisant le fait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$, on montre que la fonction f est est continue et différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.5 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x \neq y \\ f'(x), & x = y \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^2$.
b) Si $f''(a)$ existe, g est-elle différentiable en (a,a)?

<u>*Réponse*</u> :
a) g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) oui.

Exercice 3.6 *Etudier la continuité et la différentiabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin x \sin y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, xy \neq 0 \\ 0, xy = 0 \end{cases}$$

<u>*Réponse*</u> : f est continue et différentiable en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sauf peut-être en (x,y) tels que : $xy = 0$. f est continue en (x,y) tels que : $xy = 0$. f n'est pas différentiable en $(a,0)$, $(0,a)$ avec $a \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}^*\}$. f est différentiable en $(0,0)$, $(k\pi, 0)$, $(\frac{1}{k\pi}, 0)$, $(0, k\pi)$, $(0, \frac{1}{k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

Proposition 19 *Soient*

$$f, g : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{F}, \qquad h : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R},$$

des fonctions différentiables au point $a \in \Omega$. Alors $f+g$ et fh sont différentiables en a et on a

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a), \quad d(fh)(a) = h(a)df(a) + f(a)dh(a).$$

Si de plus, $h(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{h}$ est différentiable en a et

$$d\left(\frac{f}{h}\right)(a) = \frac{(df(a))h(a) - f(a)dh(a)}{h^2(a)}.$$

4 Matrice jacobienne

Considérons l'application $f : \Omega \subset E \longrightarrow F$, $x \longmapsto y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, ..., x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, ..., x_n), \\ &\vdots \\ y_p &= f_p(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, $a \in \Omega$, existent.

Définition 21 *On appelle matrice jacobienne de f en a, la matrice d'ordre $p \times n$ suivante :*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Si $p = 1$, $J_f(a)$ se réduit à un vecteur de E,

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right), \quad (f \equiv f_1),$$

appelé gradient de f ; On le note grad f ou ∇f).

Si $n = p$, le déterminant de la matrice $J_f(a)$ s'appelle jacobien de f en a et on écrit

$$\det J_f(a) = \frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a).$$

Exprimé en terme de matrice jacobienne, la proposition précédente (sur la différentielle d'une fonction composée) fournit le résultat suivant :

Proposition 22 *On a*

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)).J_f(a).$$

Supposons de plus que f est bijective avec $g = f^{-1}$. D'où $\det J_{g \circ f}(a) = 1$, et par conséquent

$$\frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(f_1, ..., f_n)}}.$$

Cette formule est très utile car permet souvent d'éviter l'inversion explicite d'une fonction.

Proposition 23 *(théorème des accroissements finis) : Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[a, a+h] = \{a + th : 0 \leq t \leq 1\}$ soit inclus dans Ω. On suppose que f est différentiable sur Ω. Alors, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :*

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h),$$

avec $h = (h_1, ..., h_n) \in E$.

Remarque 24 *Le théorème des accroissements finis n'est plus vrai pour les fonctions à valeurs vectorielles (en particulier à valeurs complexes).*

Proposition 25 *(Inégalité des accroissements finis) : Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow F$ une application, $a \in \Omega$, $h \in E$ tels que le segment $[a, a+h]$ soit inclus dans Ω. On suppose que f est continue sur $[a, a+h]$, différentiable sur $]a, a+h[$ et que :*

$$\exists M, \forall x \in]a, a+h[, \parallel df(x) \parallel \leq M.$$

Alors,

$$\parallel f(a+h) - f(a) \parallel \leq M \parallel h \parallel.$$

Exercice 4.1 *Soit Ω un ouvert convexe de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application différentiable dans Ω. Supposons qu'il existe*

$$M = \sup\{\parallel df(x) \parallel ; x \in int\Omega\} < +\infty$$

tel que : $\forall x \in \Omega, \parallel df(x) \parallel \leq M$. Montrer que f est lipschitzienne sur Ω.

Exercice 4.2 *Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow F$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$, $x, y \in E$ tels que : $\forall t \in [0, 1]$, $x + t(y - x) \in \Omega$.*

a) Montrer que :

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)dt.$$

b) En déduire que :

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \sup_{t \in [0,1]} \|f'(x + t(y-x))\|_{\mathcal{L}(E,F)} . \|y - x\|.$$

<u>*Indication*</u> : Poser $\varphi(t) = f(x + t(y-x))$ et utiliser le théorème de la dérivée de fonctions composées.

Définition 43 *On appelle matrice hessienne (ou tout simplement hessienne) de f en a, la matrice suivante :*

$$\mathcal{H}(f,a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

A la matrice hessienne $\mathcal{H}$ de f en a (comme toute matrice carée d'ordre n), on associe la forme quadratique $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$Q(h)=\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_i h_j, \quad \forall h=(h_1,...,h_n)\in E.$$

Cette forme quadratique est parfois notée $d^2f(a)$ et sa valeur en h, $d^2f(a)(h)$. Rappelons qu'une forme quadratique Q est dite

- définie positive si $\forall h \in E, h \neq 0, Q(h) > 0$.
- semi-définie positive si $\forall h \in E, Q(h) \geq 0$.
- définie négative si $\forall h \in E, h \neq 0, Q(h) < 0$.
- semi-définie négative si $\forall h \in E, Q(h) \leq 0$.
- indéfinie si $\exists h, g \in E$ avec $Q(h) > 0$ et $Q(g) < 0$.

Proposition 44 *(Conditions suffisantes) : Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ tel que : $df(a) = 0$.*

1) Si $d^2f(a)$ est une forme quadratique définie positive, alors f possède un minimum local au point a.

2) Si $d^2f(a)$ est une forme quadratique définie négative, alors f possède un maximum local au point a.

3) Si la forme quadratique $d^2f(a)$ est indéfinie, alors f n'a pas d'extremum au point a.

Proposition 45 *Si f possède un minimum local (resp. un maximum local) au point a, alors $d^2f(a)$ est semi-définie positive (resp. semi-définie négative).*

Remarque 46 *On démontre en algèbre qu'une forme quadratique Q associée à une matrice symétrique $\mathcal{H}$ est définie positive (resp. semi-définie positive) si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{H}$ sont strictement positives (resp. positives).*

Proposition 47 *(Conditions suffisantes) : Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ tel que : $df(a) = 0$.*

1) Si les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f,a)$ sont strictement positives, alors f possède un minimum local au point a.