***Modelo Binomial:*** $X \sim Bin(n,p)$ $X - Numero\ de\ sucessos\ em\ n\ provas$

$$X = \begin{cases} x; & x = 0,1,\dots,n \\ p^x.(1-p)^{n-x}.\,{}^n_xC = P(X=x) \end{cases}$$

- $E(X) = np$
- $\prod_X(z) = (z.p + 1 - p)^n$
- $Var(X) = n.p.(1-p)$
- $M_X(S) = (p.e^s + 1 - p)^n$

**Teorema:** $X_1, X_2, \dots, X_n\ V.A.Indp:\ X_i \sim Bin(n_i, p) \Longrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(\sum_{i=1}^n n_i, p)$

***Modelo Binomial Negativo: Versão 1:*** $X \sim BN(k,p)$

$X - Numero\ de\ provas\ até\ obter\ k\ sucessos$

$$X = \begin{cases} x; & x = k, k+1, \dots \\ \binom{x-1}{k-1}.p^k.(1-p)^{x-k} = P(X=x) \end{cases}$$

***Versão 2:***

$Y - Numero\ de\ insucessos\ até\ obter\ K\ sucessos$

$$Y = \begin{cases} y; & y \in \mathbb{N}_0 \\ \binom{y-k-1}{k-1}.p^k.(1-p)^y = P(Y=y) \end{cases}$$

- $M_Y(S) = \left(\frac{p}{(1-qe)^S}\right)^k$
- $E(Y) = \frac{kq}{p}$
- $Var(X) = V(Y) = \frac{kq}{p^2}$
- $E(X) = \frac{kq}{p} + k = \frac{k}{p}$

**Teorema:** $X_1, X_2, \dots, X_n\ V.A.Indp:\ X_i \sim BN(n_i, p) \Longrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim BN(\sum_{i=1}^n n_i, p)$

***Modelo Geométrico***: $X \sim G(p)$ $(X \sim G(p) \Longrightarrow X \sim BN(1,p))$

$X - Numero\ de\ provas\ ate\ 1^{\underline{o}}\ sucesso$

$$X = \begin{cases} x; & x \in \mathbb{N} \\ p(1-p)^{x-1} \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$
- $M(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$

**Teorema:** $X \sim G(p) \Longrightarrow P(X > m+n | X > m) = P(X \geq n)$

**Teorema:** $X\ V.A.com\ suporte\ em\ \mathbb{N}_0: P(X > m-n | X > m) = P(X \geq n) \Longrightarrow X \sim G(p)$

***Modelo Hipergeométrico:*** $X \sim HG(M,N,p)$ $M - Total\ da\ população$ $N - Dimensão\ da\ amostra$

$P - Percentagem\ de\ sucessos\ na\ população$ $X - Numero\ de\ sucessos\ na\ amostra$

$$X = \begin{cases} \max\{0, N - Mq\} \leq x \leq \min\{N, Mp\} \\ \frac{\binom{Mp}{x}.\binom{M(1-p)}{N-x}}{\binom{M}{N}} = P(X=x) \end{cases}$$

$$\lim_{M \to +\infty} \frac{\binom{Mp}{x}.\binom{M(1-p)}{N-x}}{\binom{M}{N}} = \binom{N}{x}.p^x.(1-p)^{N-x}, \forall x \in \{1, \dots, N\}$$

$Amostragem\ sem\ reposição \rightarrow X \sim Bin(N,p)$

$Amostragem\ com\ reposição:$

- $E(X) = Np$
- $Var(X) = Np(1-p) \times \frac{M-N}{M-1}$

***Modelo de Poisson:*** $X \sim P(\lambda)$, $X\ tem\ f.m.p\ f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$

- $M(s) = e^{\lambda(e^s - 1)}$
- $E(X) = \lambda$
- $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

**Teorema:** $X_1, X_2, \dots, X_n\ V.A.Indp:\ X_i \sim P(\lambda_i) \Longrightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim P(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$

**Teorema:** $X_n \sim Bin(n, p_n)$, $se\ n \times p_n = \lambda\ e\ \lim_{n \to +\infty} p_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda} - \lambda^k}{k!}$

**Teorema:** $X, Y\ V.A.I.X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2), n \in \mathbb{N}, n\ fixo \Longrightarrow X | X + Y = n \sim Bin(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})$

**Teorema:** $X \sim P(\lambda_i)\ e\ Y | X = n \sim Bin(n,p) \Longrightarrow Y \sim P(p\lambda_1)$

**Vetores Aleatorios:** $(Y, \mathrm{X}): \omega \epsilon \Omega \longrightarrow (\mathrm{X}(\omega), \mathrm{Y}(\omega)) \in \mathbb{R}^2$ **F. Distribuição Conjunta:** $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

**F. Distribuição Marginal:**

$F_X(x) = F_{X,Y}(x, +\infty)$; $F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$

**Teorema:** $X, Y\ V.A.I \Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$

**Prop F.D.C:**

1. $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$
2. $F_{X,Y}(x,y)$ $é\ não\ decrescente\ em\ relação\ a\ qualquer\ um\ dos\ argumentos$
3. $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = 0;\ F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$
4. $I = \{(x,y): x_1 < X \leq x_2; y_1 < Y \leq y_2\},\ P(I) =$ $= F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) + F_{X,Y}(x_1, y_1)$
5. $F_X$ $é\ contínua\ a\ direita\ em\ relação\ a\ x\ e\ y.$

## Vetores aleatórios Discretos:

**F. Massa Prob Conjunta:**

$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$, $\sum\sum f_{X,Y}(x,y) = 1$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (x_n, y_n) \\ P(X = x_n, Y = y_n) \end{cases}$$

**F. Massa Prob Marginal:**

$f_X(x) = \sum_{i=1}^n f_{X,Y}(x, y_i)$ ; $f_Y(y) = \sum_{i=1}^n f_{X,Y}(x_i, y)$ **Teorema:** $X, Y\ V.A.I \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$

**F. Prob Condicionada:** $f_{X|Y=y_i}(y) = P(X = x | Y = y_i) = \frac{f_{X,Y}(x, y_i)}{f_Y(y_i)}$ ; $f_{Y|X=x_i}(x) = P(Y = y | X = x_i) = \frac{f_{X,Y}(x_i, y)}{f_X(x_i)}$

**Valor Médio:** $E[\psi(X,Y)] = \sum_i \sum_j \psi(x_i, y_j).f_{X,Y}(x_i, y_j)$ **M ord. k+s em rl. a:** $M = \sum_i \sum_j (x_i - a)^k (y_j - a)^s f_{X,Y}(x_i, y_j)$

**Covariância:** $Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y) \rightarrow \begin{cases} > 0, & associam - se\ diretamente \\ < 0, & associam - se\ inversamente \\ = 0, & não\ se\ associam \end{cases}$