

Proposition 1.1.1. Soient P, Q et R trois assertions. Nous avons les équivalences suivantes :

- (1) $P \Leftrightarrow \overline{(\overline{P})}$
- (2) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
- (3) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
- (4) $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$
- (5) $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$
- (6) $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- (7) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
- (8) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

1.1.3 Quantificateurs

Le quantificateur "∀" : pour tout

L'assertion

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E .

On lit : pour tout x appartenant à E , $P(x)$ est vraie.

Exemple 1.1.7.

- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ est une assertion fausse.

Quantificateur "∃" : il existe

L'assertion

$$\exists x \in E, \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

On lit il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie).

Exemple 1.1.8.

- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ est vraie, par exemple $x = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ est fausse.

La négation des quantificateurs

La négation de

$$(\forall x \in E, \quad P(x)) \quad \text{est} \quad \left(\exists x \in E, \quad \overline{P(x)} \right).$$

Exemple 1.1.9. La négation de $\left(\forall x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2 \geq 0}_{P(x)} \right)$ est l'assertion

$$\exists x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2 < 0}_{\overline{P(x)}}.$$

1.3.2 Correction des exercices

Solution 1.

- (a) $(2 < 3)$ est vraie et $(2 \text{ divise } 4)$ est vraie donc $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 4)$ est vraie.
- (b) $(2 < 3)$ est vraie et $(2 \text{ divise } 5)$ est fausse, l'une des deux est fausse donc $(2 < 3)$ et $(2 \text{ divise } 5)$ est fausse.
- (c) $(2 < 3)$ est vraie et $(2 \text{ divise } 5)$ est fausse, l'une des deux est vraie donc $(2 < 3)$ ou $(2 \text{ divise } 5)$ est vraie.
- (d) $(2 < 3)$ est vraie et $\overline{(2 \text{ divise } 5)}$ est vraie, les deux sont vraies donc $((2 < 3) \text{ et } \overline{(2 \text{ divise } 5)})$ est vraie.
- (e) $(2 < 3)$ est vraie donc $\overline{(2 < 3)}$ est fausse et $(2 \text{ divise } 5)$ est fausse par conséquent $\overline{(2 < 3)}$ ou $(2 \text{ divise } 5)$ est fausse car les deux assertions sont fausses.

Solution 2.

Le connecteur logique sur les assertion suivante

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$.
- (2) $\forall z \in \mathbb{C} : z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- (3) $\forall x \geq 0 : x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Solution 3.

- (a) est fausse. Car sa négation qui est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$$

est vraie. Etant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y > 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x + 1)$ et alors $x + y = -1 < 0$.

- (b) est vraie pour tout x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x + 1$ et alors $x + y = 1 > 0$. La négation de (b) est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$$

- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$, est fausse, par exemple $x = -1, y = 0$. La négation est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$$

- (d) est vraie, on peut prendre $x = -1$. La négation est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x.$$

Solution 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier, c'est-à-dire

$$\underbrace{(\exists k \in \mathbb{N}^* : n = k^2)}_P \Rightarrow \underbrace{(\forall m \in \mathbb{N} : 2n \neq m^2)}_Q.$$

Raisonnons par l'absurde.

On suppose donc que n est le carré d'un entier, et que $2n$ est lui aussi le carré d'un entier, c'est-à-dire

$$\underbrace{(\exists k \in \mathbb{N}^* : n = k^2)}_P \text{ et } \underbrace{(\exists m \in \mathbb{N}^* : 2n = m^2)}_Q.$$

2.2.3 Relation d'ordre

Définition 2.2.5. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite une relation d'ordre si elle est antisymétrique, transitive et réflexive.

Exemple 2.2.3. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation x divise y , c'est-à-dire

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx.$$

Alors

- Pour $x \in \mathbb{N}^* : x$ divise x , donc $\mathcal{R}$ est une relation réflexive,
- Pour $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, si x divise y et y divise z , donc x divise z , ça signifie que $\mathcal{R}$ est une relation transitive.
- Pour $x, y \in \mathbb{N}^*$, si x divise y et y divise x , alors

$$\left. \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : y = k_1x \\ y\mathcal{R}x \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : x = k_2y \end{array} \right\} \Rightarrow x = k_2k_1x$$

$$\Rightarrow x(1 - k_2k_1) = 0$$

$$\Rightarrow k_2k_1 = 1, \text{ car } x \neq 0,$$

il vient que $k_2k_1 = 1$, comme $k_2, k_1 \in \mathbb{N}^*$, alors $k_2 = k_1 = 1$, c'est-à-dire $x = y$, ça signifie que $\mathcal{R}$ est une relation anti-symétrique.

Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

L'ordre total et l'ordre partiel

Définition 2.2.6. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre définie sur un ensemble E , on dit que $\mathcal{R}$ est totale, si pour tout $x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Sinon, on dit que $\mathcal{R}$ est partielle, c'est-à-dire

$$\exists x, y \in E : \text{ni } x\mathcal{R}y \text{ et ni } y\mathcal{R}x$$

Exemple 2.2.4. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y = nx.$$

Pour $x = 2$ et $y = 3$, on a ni $x\mathcal{R}y$ ni $y\mathcal{R}x$, alors $\mathcal{R}$ est un ordre partiel.

2.3 Les applications

2.3.1 Définition d'une application

Définition 2.3.1. Soient E et F des ensembles donnés, on appelle application de E dans F , toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui associe à tout élément de E un et seul élément de F , on écrit

$$\begin{array}{lcl} f : E & \rightarrow & F \\ x & \rightarrow & f(x) \end{array}$$

L'ensemble E est dit ensemble de départ et F est dit ensemble d'arrivée.

L'élément x est dit l'antécédent et y est dit l'image de x par f .

L'application f est dite fonction si, pour chaque $x \in E$, il existe au plus $y \in F$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 2.3.1. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, tel que $f(n) = n + ie^n$, alors f est une application, avec $E = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{C}$.

Définition 2.3.2 (Graphe). Soient E et F des ensembles donnés. Le graphe d'une application $f : E \rightarrow F$ est

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in E\} \subset E \times F.$$

Définition 2.3.3 (Égalité). Soient $f, g : E \rightarrow F$ des applications. On dit que f, g sont égales si et seulement si

$$\text{pour tout } x \in E : f(x) = g(x).$$

On écrit alors $f = g$.

Définition 2.3.4 (Composition). Soient E, F et G trois ensembles et f et g deux applications telles que

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

On peut en déduire une application de E dans G notée $g \circ f$ et appelée application composée de f et g , par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Définition 2.3.5. Soit E un ensemble, on appelle application identité, notée $\text{id} : E \rightarrow E$ l'application qui vérifie $\text{id}(x) = x, \forall x \in E$.

Exemple 2.3.2. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty[$ définies par :

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Alors $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ est donnée par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.3.6. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. On appelle domaine de définition de f , noté $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des éléments $x \in E$ fait auxquels il existe un unique élément $y \in F$, telle que $y = f(x)$.

Exemple 2.3.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$, alors

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[.$$

Définition 2.3.7. Soit $A \subset E$ et $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle restriction de f à A , l'application $f|_A : E \rightarrow F$ définie par

$$f|_A(x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in A.$$

Définition 2.3.8. Soit $E \subset G$ et $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle prolongement de f à G , toute application g de G vers F dont la restriction à E est f .

Exemple 2.3.7. Soit f l'application définie par $f(x) = |x|$ de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, alors f est surjective. Soit $y \in \mathbb{N}$, pour $x = y$ ou $x = -y$, on a $x \in \mathbb{Z}$ et

$$f(x) = |x| = y,$$

donc il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f(x)$.

Définition 2.3.13. Soit $f : E \rightarrow F$. On dit que f est bijective (ou f est une bijection de E sur F) si et seulement si : f est à la fois injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E \quad y = f(x).$$

Exemple 2.3.8. Soit f l'application définie par $f(x) = x - 7$ de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, alors f est bijective. En effet, soit $y \in \mathbb{Z}$, tel que $f(x) = y$, alors $x = y + 7$, donc il existe un unique x dans $\mathbb{Z}$ tel que $y = f(x)$.

Remarque. Si l'application f est bijective, et seulement dans ce cas, à tout $y \in F$ on fait correspondre un $x \in E$ et un seul.

Définition 2.3.14. Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. On définit l'application $f^{-1} : F \rightarrow E$, appelée application réciproque de f , donnée par $f^{-1}(x) = y$ si et seulement si $f(y) = x$.

Exemple 2.3.9. Soit f l'application définie par $f(x) = x^2 + 1$ de $\mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty[$, alors f est bijective, car pour tout $y \in [1, +\infty[$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x = \sqrt{y - 1}$. La bijection réciproque est $f^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}, \quad \text{pour tout } x \in [1, +\infty[.$$

Proposition 2.3.2. Soit E, F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$f \circ g = id_F \quad \text{et} \quad g \circ f = id_E.$$

Exemple 2.3.10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, f est bijective, sa bijection réciproque est $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(x)$. On a $f \circ g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$(f \circ g)(x) = e^{\ln x} = x = id_{\mathbb{R}_+^*}(x) \quad \text{et} \quad (g \circ f)(x) = \ln e^x = x = id_{\mathbb{R}}(x).$$

Proposition 2.3.3. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2.4 Exercices

2.4.1 Énoncés

Exercice 8.

(1) On considère les ensembles suivants :

$$A = \{1, 3, 7, 9, 12\}, \quad B = \{1, 3, 2\}, \quad C = \{3, 4, 7, 9\}, \quad D = \{3, 1\}.$$

Décrire les ensembles suivants et leurs cardinaux :

$$A \cap B, \quad A \setminus B, \quad A \Delta B, \quad D \times C, \quad B \cap C, \quad C_D A, \quad D \cup A, \quad \mathcal{P}(C).$$

(2) Décrire les ensembles suivants :

$$F = [-2, 1[\cap]-\infty, 0], \quad E = [-2, 1[\cup]-\infty, 0], \quad G = [-2, 1[\Delta]-\infty, 0], \quad H = C_{\mathbb{R}} F.$$

Exercice 9. Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E .

- (1) Montrer que : $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
- (2) Si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$, montrer que $B \subset C$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

- (1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- (2) Déterminer la classe d'équivalence de $(1, 0)$.
- (3) Même questions pour la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Exercice 11. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

- (1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre
- (2) L'ordre est-il total ?

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \cos^2(x_1) + \sin^2(x_2) = 1 \quad \text{et} \quad |y_1| = |y_2|.$$

- (1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- (2) Déterminer la classe d'équivalence de $(0, 0)$.

Exercice 13.

- (1) Montrer que les fonctions suivantes sont des applications puis vérifier si elles sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$\begin{array}{lll} v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} & k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 & n \mapsto 2n^2 - 7 & n \mapsto 4n^2 + 5 \\ f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1] & g : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} & x \mapsto \frac{2-x}{x+3} & x \mapsto \ln x \end{array}$$

ce qui entraîne que $x_1 = x_2 = 1$ ou $x_1 = x_2 = -1$, c'est-à-dire que $x_1 = x_2$, ainsi

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

L'application g est surjective. Soit $y \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} (f(x) = y) &\Leftrightarrow (y(1+x^2) = 2x) \\ &\Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0. \end{aligned}$$

Si $y \in [-1, 1]$, alors $1 - y^2 \geq 0$, comme $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1 - y^2) \geq 0$, alors l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$ admet deux solutions

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}, \quad \text{avec } y \neq 0.$$

La seule solution acceptée $x \in [-1, 1]$ est $x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$, car, si $y = \frac{1}{2}$, alors $\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} = 2 + \sqrt{3} \notin [-1, 1]$.

Si $y = 0$, alors $x = 0$. Donc g est une bijection.

Solution 15.

(1) La fonction f est injective. Soit $x_1, x_2 \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} [f(x_1) = f(x_2)] &\Rightarrow (\sqrt{x_1} + 1)^2 - 1 = (\sqrt{x_2} + 1)^2 - 1 \\ &\Rightarrow (\sqrt{x_1} + 1)^2 = (\sqrt{x_2} + 1)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1} + 1 = \sqrt{x_2} + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

La fonction f est surjective. Soit $y \in [0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned} [y = f(x)] &\Leftrightarrow y = (\sqrt{x} + 1)^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 = y + 1. \end{aligned}$$

Comme $y \in [0, +\infty[$, alors l'équation $(\sqrt{x} + 1)^2 = y + 1 > 1$ admet des solutions

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + 1)^2 = y + 1 &\Leftrightarrow |\sqrt{x} + 1| = \sqrt{y + 1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt{y + 1}, \end{aligned}$$

car $\sqrt{x} + 1 > 0$, donc

$$\sqrt{x} = \sqrt{y + 1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = (\sqrt{y + 1} - 1)^2 \geq 0,$$

alors

$$x = (\sqrt{y + 1} - 1)^2 \in [0, \infty[.$$

(2) La fonction réciproque $f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ est donnée par :

$$f^{-1}(x) = (\sqrt{x + 1} - 1)^2 = x + 2 - 2\sqrt{1 + x}, \quad \forall x \in [0, \infty[.$$

Exemple 3.1.2.

- i) Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante.
- ii) La fonction valeur absolue $x \rightarrow |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas monotone.

3.1.4 Fonction paire, impaire, périodique

Définition 3.1.5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- i) f est paire si $\forall x \in I : f(-x) = f(x)$.
- ii) f est impaire si $\forall x \in I : f(-x) = -f(x)$.

Exemple 3.1.3.

- i) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est paire.
- ii) La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.

Définition 3.1.6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + T) = f(x).$$

Exemple 3.1.4. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques. La fonction tangente est π -périodique.

3.1.5 Opérations algébriques sur les fonctions

L'ensemble des fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est noté $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

Définition 3.1.7. Soient f et $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit

- Somme de deux fonctions $f + g : x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\lambda f : x \rightarrow (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- Produit de deux fonctions $fg : x \rightarrow (fg)(x) = f(x)g(x)$.

Remarque. Les fonctions $f + g$, λf et fg sont des fonctions appartenant à $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

Définition 3.1.8. Soient f et $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que

- $f \leq g$ si $\forall x \in D, f(x) \leq g(x)$.
- $f < g$ si $\forall x \in D, f(x) < g(x)$.

Exemple 3.1.5. Soient f et g deux fonctions définies sur $]0, 1[$ par $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. On a $g < f$, car $\forall x \in]0, 1[, x^2 < x$.

3.2.2 Théorèmes sur les limites

Théorème 3.2.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$,
- (2) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in]a, b[$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \ell$.

Démonstration. Condition nécessaire : Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$. Ceci s'écrit, par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad \text{si } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Comme $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|x_n - x_0| < \delta$. En récapitulant, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Ce qui signifie bien que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

Condition suffisante : Supposons que ℓ n'est pas limite de f en x_0 . La négation de la définition de la limite nous donne

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists x \in [a, b], \quad \text{si } |x - x_0| < \delta \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [a, b]$, tel que

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Donc, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet x_0 comme limite, cependant, ℓ n'est pas limite de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Exemple 3.2.4. La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite au point 0. En effet, considérons les suites

$$x_n = \frac{1}{(n+1)\pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a $x_n \rightarrow 0$ et $y_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, comme

$$\sin(x_n) = \sin((n+1)\pi) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

alors les deux limites sont différentes, donc f n'admet pas de limite au point 0.

3.2.3 Opérations sur les limites

Théorème 3.2.2. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$, tel que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$, Alors

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$.
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \ell$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = \ell \ell'$.

Remarque. En posant $x = x_0 + h$, on a

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

On peut encore écrire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Exemple 3.4.1. Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La dérivée de f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2x_0h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2x_0 = 2x_0. \end{aligned}$$

Définition 3.4.2. La fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$ dans $\mathbb{R}$ s'appelle fonction dérivée de f et se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Proposition 3.4.1. Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Démonstration. Si f est dérivable au point x_0 , alors pour tout $h > 0$, il existe $\varepsilon(h)$ tel que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

□

3.4.2 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 3.4.3. La dérivée f' de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction sur l'intervalle I . Si f' est dérivable à son tour, sa dérivée, notée $f'' = (f')'$, est dite dérivée seconde de f . Cette notion se généralise à l'ordre n . Ainsi la dérivée d'ordre n de f est définie par

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

Exemple 3.4.2. Soit la fonction $f(x) = \sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Les dérivées d'ordre 1 et 2 sont

$$f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad f''(x) = -\sin(x) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Par récurrence la dérivée d'ordre n de f est

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Fonction de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 3.4.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction définie sur l'intervalle I est de classe $\mathcal{C}^n$ ou n fois continuellement dérivable si elle est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I . On notera $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Définition 3.4.5. On dit qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^0$ si elle est continue sur I , et de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle indéfiniment dérivable sur I (c'est-à-dire $f^{(n)}$ existe pour tout n).

Exemple 3.4.3. La fonction $x \rightarrow |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, car n'est pas dérivable à l'origine.

Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 3.4.6. On dit que la fonction f est dérivable à droite en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

On dit que la fonction f est dérivable à gauche en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

Notation. On note, dans ce cas :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarque. La dérivée de f au point x_0 existe si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égales

$$f \text{ est dérivable au point } x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0).$$

Définition 3.4.7. Si les dérivées à gauche et à droite existent et sont différentes, il existe alors deux demi-tangentes à la courbe C_f au point $(x_0, f(x_0))$ dit point anguleux.

Exemple 3.4.4. Considérons la fonction $f(x) = |x^2 - 1|$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Elle admet deux points anguleux, à savoir l'origine $(0, 0)$ et le point $(1, 0)$.

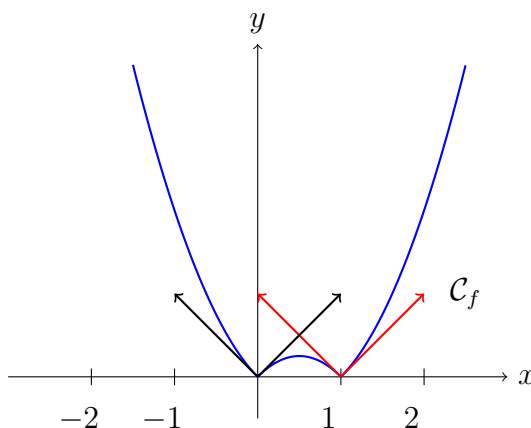
- Au point $(0, 0)$ on a

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x} = -1 \quad \text{et} \quad f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x^2}{x} = 1.$$

- Au point $(1, 0)$ on a

$$f'_g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} = -1 \quad \text{et} \quad f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 1.$$

A l'origine on a deux demi-tangentes, à savoir, $y = x$ et $y = -x$. Au point $(1, 0)$, on a aussi deux demi-tangentes d'équations : $y = x - 1$ et $y = -x + 1$.



Règle de l'hôpital

Théorème 3.4.7. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$, et tendant vers 0 toutes les deux pour $x \rightarrow a^+$. On suppose que $g'(x)$ ne s'annule pas dans un voisinage de a et que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Dans ces conditions

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

Aussi, ce résultat vaut que ℓ soit un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque. Le théorème reste valable quand f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$, et tendant vers 0 toutes les deux pour $x \rightarrow b^-$.

Théorème 3.4.8. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x)$ ne s'annule pas dans $]a, b[$ et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite ℓ au point $x_0 \in]a, b[$, alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

Démonstration. Le Théorème des accroissements généralisés appliqué sur $[x_0, x]$ donne

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \quad \text{avec } c_x \in]x_0, x[.$$

Si $x \rightarrow x_0$, alors $c_x \rightarrow x_0$, par suite $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \rightarrow \ell$, autrement dit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \rightarrow \ell \quad \text{lorsque } x \rightarrow x_0.$$

□

Exemple 3.4.6. Soit la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln x}, \quad \forall x \in]0, 2[$$

Posons $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ et $g(x) = \ln(x)$, alors $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, $g(1) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x}{x^2 + x + 1} = 1,$$

d'après la règle de l'hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln x} = 1.$$

Solution 21.

- La fonction f est continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$, $]0, \pi[$ et $]\pi, +\infty[$.
- Pour $x_0 = 0$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = 0$. On a

$$f_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + x = 0,$$

$$f_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0,$$

Alors $f_g(0) = f_d(0) = f(0)$, donc f est continue en $x_0 = 0$.

- On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = 0$. On a

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1.$$

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

Comme $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$, alors la fonction f est dérivable en $x_0 = 0$.

- Pour $x_0 = \pi$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = \pi$, alors

$$f_g(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(x) = 0,$$

$$f_d(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} 1 + \cos(x) = 0,$$

Alors $f_g(\pi) = f_d(\pi) = f(\pi)$, donc f est continue en $x_0 = \pi$.

- On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = \pi$, alors

$$f'_g(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin(x)}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(y)}{y} = -1.$$

$$\begin{aligned} f'_d(\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 + \cos(x)}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos(y + \pi)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} y \left(\frac{1 - \cos(y)}{y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{2} = 0, \end{aligned}$$

Comme $f'_g(\pi) \neq f'_d(\pi)$, alors la fonction f n'est pas dérivable en $x_0 = \pi$.

- La fonction g est continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- Pour $x_0 = 0$, on utilisera les définitions des limites à gauche et à droite au point $x_0 = 0$, on a

$$g_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0,$$

$$g_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) - x = 0,$$

Alors $g_g(0) = g_d(0) = g(0)$, donc g est continue en $x_0 = 0$.

- On utilisera les définitions des dérivées à gauche et à droite au point $x_0 = 0$, nous avons

$$g'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$g'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - 1 = -\infty,$$

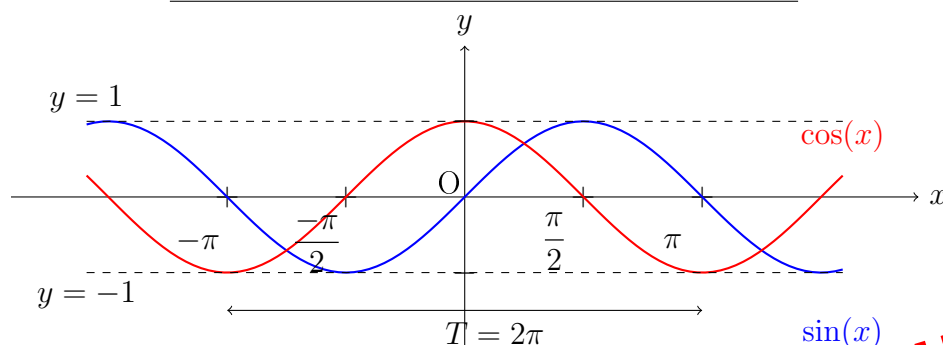
Comme $g'_d(0) = -\infty$, alors la fonction g n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

4.2 Fonctions trigonométriques et leurs inverses

4.2.1 Fonctions trigonométriques

Les fonctions sinus et cosinus

Fonction	$\sin x$	$\cos x$
Domaine de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Parité	impaire	paire
Période	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$



Propriétés

Les fonctions sinus et cosinus satisfont les propriétés suivantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

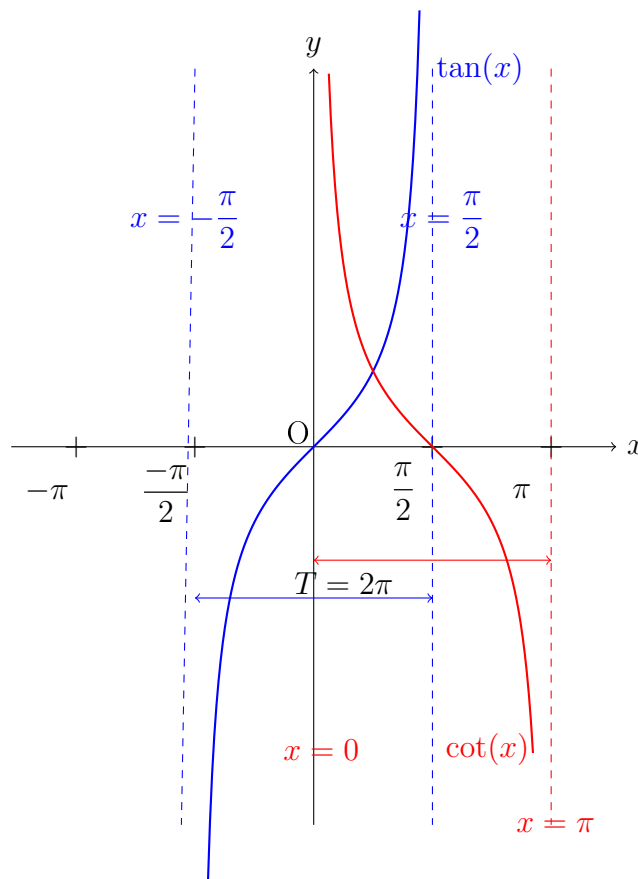
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$

Formules d'addition $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$
- $\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$
- $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
- $\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$

Formules de transformation de produits en sommes

- $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$
- $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$



Propriétés. La fonction tangente satisfait les propriétés suivantes si $x, y \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, on a

- $\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$
- $\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \tan(y)}$
- $\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$

4.2.2 Fonctions circulaire réciproques

Fonction $x \rightarrow \arcsin x$

La fonction sinus a une fonction dérivée strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc c'est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque est appelée fonction arcsinus et est notée $\arcsin$,

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin(x).$$

$$(3) \quad \forall x \in [0, \pi], \text{ on a } \cos(x) = y \Leftrightarrow x = \arccos(y).$$

$$(4) \quad \forall x \in [-1, 1], \text{ on a } \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Proposition 4.2.2. La fonction $\arccos$ est dérivable dans $] -1, 1[$, et l'on a

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in] -1, 1[$, on a $\cos(\arccos(x)) = x$, par dérivation, on obtient

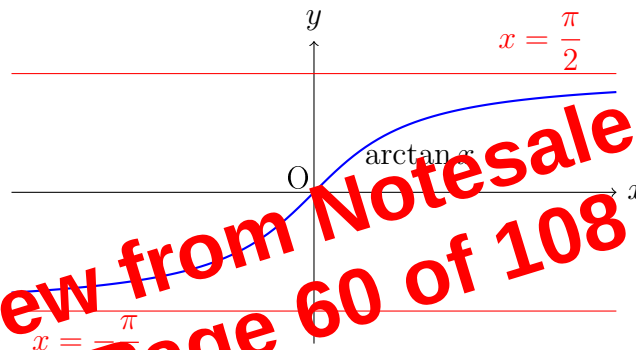
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Fonction $x \rightarrow \arctan x$

La fonction tangente a une fonction dérivée strictement positive sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc c'est une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée $\arctan$,

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad x \mapsto \arctan(x).$$



Propriétés.

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \tan(\arctan(x)) = x.$$

$$(2) \quad \forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{ on a } \arctan \tan(x) = x.$$

$$(3) \quad \text{La fonction } \arctan \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ et l'on a}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.3 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

4.3.1 Fonctions hyperboliques

Définition 4.3.1. Les fonctions de la variable x ,

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad \operatorname{coth}(x) = \frac{1}{\operatorname{th}(x)}, \quad (x \neq 0)$$

s'appellent respectivement cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique et co-tangente hyperbolique.

2) On a

$$\begin{aligned} e^x - 1 - x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x) - 1 - x \\ &= \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + x^3 \varepsilon(x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{120} + x^3 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon(x) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

Alors

$$f_3(x) = \frac{e^x}{x + e^x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)}{1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)}.$$

DL d'un quotient

$$\begin{array}{r|l} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} & 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ - \left(1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) & - \frac{7}{6}x^3 \\ \hline -x & \\ - \left(-x - 2x^2 - \frac{7}{6}x^3 \right) & \\ \hline 2x^2 + \frac{7}{6}x^3 & \\ - (2x^2 + 4x^3) & \\ \hline -\frac{7}{6}x^3 & \end{array}$$

Donc

$$f_3(x) = 1 - x + 2x^2 - \frac{7}{6}x^3 + x^3 \varepsilon(x).$$

4) On a

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \ln(2+x) = \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) \\ &= \ln(2) + \ln(1+u), \text{ avec } u = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon(u) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

Donc

$$f_4(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + x^3 \varepsilon(x).$$

- $0_{\mathbb{R}^3} \in E$, car $0 + 0 + 0 = 0$, donc $E \neq \emptyset$.
- Soient $u = (x, y, z) \in E$ et $v = (x', y', z') \in E$, on a donc $x + y + z = 0$ et $x' + y' + z' = 0$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda u + \mu v = \lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = \left(\underbrace{\lambda x + \mu x'}_{x''}, \underbrace{\lambda y + \mu y'}_{y''}, \underbrace{\lambda z + \mu z'}_{z''} \right),$$

$$\begin{aligned} x'' + y'' + z'' &= \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z' \\ &= (\lambda x + \lambda y + \lambda z) + (\mu x' + \mu y' + \mu z') \\ &= \lambda(x + y + z) + \mu(x' + y' + z') = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda u + \mu v \in E$

Finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) On a

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -(x + y)\} \\ &= \{(x, y, -x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, -x) + (0, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ x \underbrace{(1, 0, -1)}_{u_1} + y \underbrace{(0, 1, -1)}_{u_2} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

alors $\{u_1, u_2\}$ est une famille génératrice de E , montrons que $\{u_1, u_2\}$ est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de E . Alors la dimension de E est égale à 2, car

$$\dim E = \text{Card} \{u_1, u_2\} = 2.$$

Solution 40.

(1) Soit $u = (x, y, z) \in E$, alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = z \end{aligned}$$

donc

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$

- $0_{\mathbb{R}^3} \in E$, car $0 = 0 = 0$, donc $E \neq \emptyset$.
- Soient $u = (x, y, z) \in E$ et $v = (x', y', z') \in E$, on a donc $x = y = z$ et $x' = y' = z'$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda u + \mu v = \lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = \left(\underbrace{\lambda x + \mu x'}_{x''}, \underbrace{\lambda y + \mu y'}_{y''}, \underbrace{\lambda z + \mu z'}_{z''} \right),$$