Alors on devra avoir

$$\begin{aligned}
-\mathbf{e}_3^{(3)} = (\mathbf{e}_2^{(3)})^2\,\mathbf{e}_3^{(3)} &= \mathbf{e}_2^{(3)}\,(\mathbf{e}_2^{(3)}\,\mathbf{e}_3^{(3)}) \\
&= \mathbf{e}_2^{(3)}\,(u_1\mathbf{e}_1^{(3)} + u_2\mathbf{e}_2^{(3)} + u_3\mathbf{e}_3^{(3)}) \\
&= u_1\,\mathbf{e}_2^{(3)} - u_2\,\mathbf{e}_1^{(3)} + u_3\,(u_1\,\mathbf{e}_1^{(3)} + u_2\,\mathbf{e}_2^{(3)} + u_3\,\mathbf{e}_3^{(3)})
\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\mathbf{0} = (-u_2 + u_1u_3)\,\mathbf{e}_1^{(3)} + (u_1 + u_2u_3)\,\mathbf{e}_2^{(3)} + (1 + u_3^2)\,\mathbf{e}_3^{(3)}$$

et en particulier

$$1 + u_3^2 = 0$$

ce qui est absurde.

2.2 Propriétés géométriques

Le **produit scalaire** est défini par

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

et la **norme d'un vecteur** par

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Avec ces notations, l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** s'écrit

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont linéairement dépendants et l'**inégalité du triangle** devient

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

avec égalité précisément lorsque les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des multiples positifs l'un de l'autre.

Exemple.

Une boule ouverte $B(\mathbf{a}, R)$ est ouverte : si $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{a}, R)$, soit $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| = \rho < R$. Alors si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < R - \rho$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, R)$ car

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| < R - \rho + \rho = R.$$

Exemple.

Un demi-espace ouvert

$$H_+ = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) > 0\}$$

est ouvert. Si $\mathbf{x}_0 \in H_+$, soit $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) = \delta > 0$. Alors si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta/\|\mathbf{n}\|$, $\mathbf{x} \in H_+$ car

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \geq -\|\mathbf{n}\| \, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \delta > 0.$$

Toute réunion, toute intersection finie d'ensembles ouverts est encore un ensemble ouvert.

Exemple.

Dans $\mathbb{R}$, les ensembles ouverts sont précisément les ensembles qui peuvent s'écrire comme une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est **fermé** si son complémentaire $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Exemple.

Un hyperplan H est fermé puisque son complémentaire $H_+ \cup H_-$ est ouvert.

Exemple.

Un pavé P défini par des inégalités larges,

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

est fermé. Si $\mathbf{x}_0 \notin P$, il faut que, par exemple, on ait $x_{0,1} - b_1 = \delta > 0$. Alors si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$, on a $(x_1 - x_{0,1})^2 < \delta^2$ donc

$$x_1 > x_{0,1} - \delta = b_1$$

et $\mathbf{x} \in P$.

20. On considère une suite décroissante d'ensembles compacts non vides :

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$$

Montrer que l'intersection

$$\bigcap_{k \geq 1} E_k$$

est non vide. La conclusion tient-elle si l'on remplace « compacts » par « fermés » ?