

Chapitre 3

Intégrales Triples

Dans cette section, nous définissons l'intégrale triple d'une fonction à trois variables $f(x, y, z)$ sur une partie bornée de $\mathbb{R}^3$. Par la suite, nous présentons le calcul pratique des intégrales triples. Enfin, nous expliquons les deux changements de variables essentiels, à savoir : les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

3.1 Définition

Soit V une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ et soit f une fonction à trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et continue sur V . L'intégrale triple de f sur la partie V est donnée par l'expression suivante :

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

3.2 Propriétés de l'intégrale triple

Soit V une partie bornée de $\mathbb{R}^3$.

1. **Volume**(V) : Si $f(x, y, z) = 1$, alors

$$\text{Volume}(V) = \int \int \int_V dx dy dz.$$

2. **Positivité** : Si $f(x, y, z) \geq 0$ pour $(x, y, z) \in V$, alors

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz \geq 0.$$

3. **Linéarité** : Soient f et g deux fonctions à trois variables intégrables sur V et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \int \int \int_V (\lambda f(x, y, z) + \mu g(x, y, z)) dx dy dz &= \lambda \int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &+ \mu \int \int \int_V g(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

4. **Relation de Chasles** : Si $V = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (V_1 et V_2 sont disjoints, i.e., $\text{VOLUME}(V_1 \cap V_2) = 0$), alors

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \int \int \int_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

3.3 Calcul pratique des intégrales triples

Nous présentons ici le calcul pratique des intégrales triples sur plusieurs parties de différentes formes.

3.3.1 Intégrale triple sur un parallélépipède : Théorème de Fubini

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur le parallélépipède $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, s]$, avec $a, b, c, d, e, s \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^s f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_e^s \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^s f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_e^s \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy \\ &= \int_e^s \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_e^s \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz. \end{aligned}$$

(Important : Ici l'ordre d'intégration n'est pas forcé. Cependant, on peut choisir l'ordre qui peut nous faciliter d'avantage les calculs mathématiques).

3.3.2 Intégrale triple sur une partie bornée et déformée de $\mathbb{R}^3$ – Théorème de Fubini

Soit V une partie déformée de $\mathbb{R}^3$ incluse dans le parallélépipède $[a, b] \times [c, d] \times [e, s]$.
Donc, la partie V peut se présenter sous l'une des formes suivantes :

Forme 1 – (Type 1) : $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D \text{ et } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, avec
 D est la projection orthogonale de V sur le plan (xOy) .

Forme 2 – (Type 2) : $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | e \leq z \leq s \text{ et } (x, y) \in D_z\}$, avec D_z est
l'intersection de V avec le plan $z = Cte$.

Théorème de Fubini

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur V . Alors, on a

1. Si V est de Type 1 (Forme 1),

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_D \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

2. Si V est de Type 2 (Forme 2),

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^s \left(\int \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

(Important : Ici l'ordre d'intégration est forcé, selon le domaine d'intégration V donné).

Exemple 12. Calculer l'intégrale triple suivante : $\int \int \int_V dx dy dz$, où

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x + y + z \leq 1\}.$$

Dans cette situation, le calcul peut se faire de deux manières différentes : Soit en utilisant la **Forme 1** ou bien en utilisant la **Forme 2**.

– Utilisons la **Forme 1**. L'idée est d'écrire V sous cette forme :

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x + y + z \leq 1\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \text{ et } 0 \leq z \leq 1 - x - y\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, notre intégrale s'écrit

$$\int \int \int_V dx dy dz = \int \int_D \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dx dy,$$