I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \longmapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit q un nombre strictement positif. La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q.
La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base q.
On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}8^x$ est la fonction exponentielle de base 0,8.
Une valeur approchée de l'image de $-5{,}3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence : 0.8 ∧ (- 5.3).

RELATION FONCTIONNELLE

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme les sommes en produits. Pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

CONSÉQUENCES

— $\boxed{\text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ q^{-x} = \dfrac{1}{q^x} \text{ et } q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}}$

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ soit $1 = q^x \times q^{-x}$ donc $q^x \neq 0$ et $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.

De plus, $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ q^x > 0.}$

En effet, $q^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}}$ soit $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ avec $q^x \neq 0$.

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}, \text{ et en particulier } q^{0,5} = \sqrt{q}}$

En effet, $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $q^x > 0$.

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ et tout entier relatif } m,\ \left(q^x\right)^m = q^{mx}}$

Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

— $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n > 0,\ q^{\frac{1}{n}} \text{ est « la racine } n\text{-ième » de } q}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\dfrac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$