المعهد العالي للإعلامية و الملتميديا بصفاقس

Devoir Surveillé d'Algèbre 3

Classe : D-P.I.I.M.	**Année universitaire : 2022-2023**
Enseignant : Jedidi Omar	**Date : 14/11/2022**
Nombre de pages : 1	**Durée : 1h**

➤ Problème

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & (X^2+1).P(1)-(X-1)^2.P'(0). \end{array}$$

❶ (a) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}_c=\{1,X,X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Donner le polynôme caractéristique de A.

(c) En déduire le spectre de A.

(d) f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$? Justifier la réponse.

❷ (a) Montrer que X^2-1 et X^2+1 sont des vecteurs propres de f.

(b) En déduire la dimension de chaque sous-espace propre de f.

(c) Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est : $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Montrer qu'il existe une matrice $T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A=T.D.T^{-1}$.

❸ On considère le polynôme $P=X^2+X\in\mathbb{R}_2[X]$.

(a) Donner les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'$.

(b) En déduire l'expression de $f^n(P)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

❹ Soient $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que B est une racine carrée de A.

(b) Calculer $B.X_k$ pour $k=1,2,3$.

(c) En déduire les valeurs propres de B.

(d) Montrer que la matrice B est diagonalisable.

(e) En déduire qu'il existe une matrice inversible $S\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D=S^{-1}.A.S$ avec D est la matrice de la question ❷ (c).

✿ ✿ ***Bon travail*** ✿ ✿