Caractérisation : deux bases orthonormales ont la même orientation si et seulement si leur matrice de passage est dans le groupe spécial orthogonal.

c) Cas particulier de la dimension 2

i) Une rotation r est un endomorphisme orthogonal de déterminant 1.
Dans une base orthonormale, sa matrice est donc dans $SO(2)$.

ii) Caractérisation de $SO(2)$

Propriété : la matrice d'une rotation dans une base orthonormale , comme celle des changement de base orthonormales directes, est de la forme $Rot(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Preuve :

$C_1 = Coord_{\vec{i},\vec{j}}(r(\vec{i}))$ est un vecteur du cercle unité, il est donc de la forme $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et puisque $(r(\vec{i}), r(\vec{j}))$ est une autre base orthonormale directe, $C_2 = Coord_{\vec{i},\vec{j}}(r(\vec{j}))=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

Remarque : ainsi, étant donné une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$ d'un plan euclidien orienté, pour tout vecteur normé $\vec{u}$ d'un plan euclidien orienté il existe une unique rotation r telle que $r(\vec{i})=\vec{u}$
Autrement formulé : pour tout vecteur normé $\vec{u}$ il existe un unique vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormale directe. *Et on peut remarquer que* $C_2 = Rot(\frac{\pi}{2})C_1$: le vecteur $\vec{v}$ est obtenu à partir de $\vec{u}$ par une rotation d'angle droit.

iii) $Rot(\theta)\times Rot(\varphi) = Rot(\theta+\varphi)$. Ainsi les rotations commutent entre elles.

Une preuve en diagonalisant sur $\mathbb{C}$ pour changer des formules d'addition de la trigonométrie.
Toutes ces matrices codiagonalisent car $Rot(\theta)=\cos(\theta)I_2+\sin(\theta)Rot(\frac{\pi}{2})$

iv) Angle d'une rotation d'un plan orienté.

Théorème : soit r une rotation d'un plan euclidien orienté. Sa matrice dans une base orthonormale directe ne dépend pas de la base

Définition : si cette matrice est $Rot(\theta)$,on dit que θ est une mesure de l'angle de la rotation.
Remarque : sa matrice dans une base orthonormale indirecte est $Rot(-\theta)$.
Autrement formulé : si on change l'orientation du plan, l'angle de la rotation est changé en son opposé. Ainsi, le cosinus de l'angle ne change pas, normal puisque c'est $\frac{1}{2}Tr(r)$.

Propriété : si le vecteur normé $\vec{w}$ se déduit de $\vec{u}$ par une rotation d'angle α alors $\langle\vec{u}|\vec{w}\rangle=\cos(\alpha)$.
Rab : dans toute base orthonormale directe B $det_B(\vec{u}, \vec{v})=\sin(\alpha)$. *C'est ce qui justifie que le déterminant calcule une aire en plus de préciser si les vecteurs forment une base directe ou indirecte.*
Remarque hors programme : on dit que le couple $(\vec{u}, \vec{w})$ forme un angle (orienté) qu'on note $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$ pour le discerner des ses mesures (en radian)