# Les fonctions sinus et cosinus

## Dérivabilité

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;\,1]$ $\quad x \longmapsto \sin(x)$

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;\,1]$ $\quad x \longmapsto \cos(x)$

sin et cos sont dérivables donc continues sur $\mathbb{R}$.

- $\sin' x = +\cos x$
- $\cos' x = -\sin x$

## Dérivées de la composée

Soit $u$ une fonction dérivable sur I

$$\sin\circ u \ :\ x \overset{u}{\longmapsto} u(x) \overset{\sin}{\longmapsto} \sin[u(x)]$$

$$\cos\circ u \ :\ x \overset{u}{\longmapsto} u(x) \overset{\cos}{\longmapsto} \cos[u(x)]$$

$\sin\circ u$ et $\cos\circ u$ sont dérivables sur I et

- $\forall x \in \mathrm{I},\ (\sin\circ u)'(x) = +u'(x)\cos[u(x)]$
- $\forall x \in \mathrm{I},\ (\cos\circ u)'(x) = -u'(x)\sin[u(x)]$

**Exemple :** $f(x) = \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f'(x) = 2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

## Valeurs remarquables

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |

## Formules élémentaires

- sin et cos sont bornées $\begin{cases} -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- De sinus à cosinus :

  $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

## Intervalle d'étude

sin et cos sont $2\pi$-périodique et respectivement impaire et paire, on peut restreindre leur intervalle d'étude à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
On complète ensuite sur $[-\pi\,;\,0]$ par symétrie.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin' x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\sin x$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos' x$ | | | $-$ | | |
| $\cos x$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ |

## Périodicité et parité

1) sin et cos sont $2\pi$-périodique :
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+2\pi) = \sin x$
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos x$

2) - La fonction sin est impaire :
     $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x$
     $\mathscr{C}_{\sin}$ admet l'origine O pour centre de symétrie.
   - La fonction cos est paire :
     $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x$
     $\mathscr{C}_{\cos}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

## Limites utiles

Limites qui reviennent aux nombres dérivés en 0 :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

**Application :** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$

## Courbes représentatives

- Les courbes de sin et cos sont des sinusoïdes.
- On déduit la sinusoïde de cos par une translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ de la sinusoïde de sin.