$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

La constante dieléctrica está relacionada con la capacidad del medio para transmitir la interacción eléctrica.

En un medio con un constante dieléctrica alta (K, pequeña) la fuerza entre dos cargas será más pequeña que en otro en el que la constante dieléctrica sea baja (K, grande). El primer medio es mejor aislante y, por tanto, "transmite" peor la interacción entre cargas (recordar que en física los medios aislantes reciben el nombre de dieléctricos)

Teniendo presente la constante de proporcionalidad electrostática (K), podemos escribir la ecuación como:

$$|\boldsymbol{F}_{12}| = \boldsymbol{K}\frac{|\boldsymbol{q}_1.\boldsymbol{q}_2|}{\boldsymbol{r}_{12}^2}$$

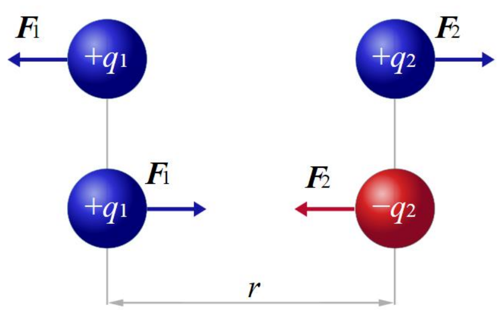
Esta ecuación se llama Ley de Coulomb y puede enunciarse como sigue:

La magnitud de la fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas eléctricas puntuales, es directamente proporcional al producto de las dos cargas e inversamente proporcionas al cuadrado de las distancias que los separa.

La ley de Coulomb es única y exclusiva para dos cargas puntuales y en definitiva establece la magnitud o modulo de la fuerza electrostática con que se atraen o repelen dos cargas puntuales y es válida únicamente para objetos cargados cuyas dimensiones sean pequeñas comparadas con las distancias que las separan. Enseguida comenzaron a deducirse consecuencias de esa fórmula, que concordaban con lo que se observaba. Cada concordancia era un apoyo a la ley de Coulomb. Esas concordancias con la realidad han confirmado hasta hoy la validez de la ley. La teoría electrostática consiste en consecuencias de solo esta ley.

Expresión matemática en forma vectorial

Como dijimos anteriormente la magnitud de las fuerzas de atracción y repulsión entre dos cargas



Se puede calcular mediante la ley de Coulomb:

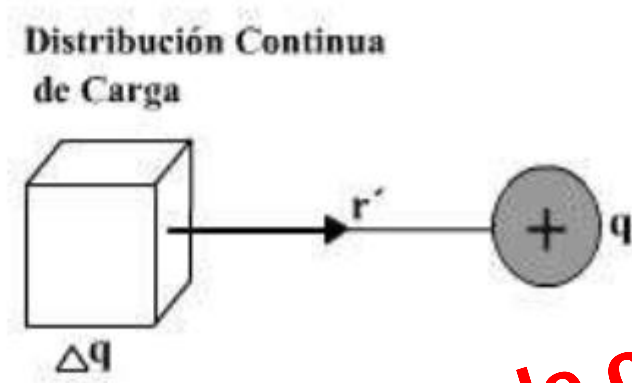
$$|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{F}_{12}| = \boldsymbol{K}\frac{|\boldsymbol{q}_1.\boldsymbol{q}_2|}{\boldsymbol{r}_{12}^2}$$

Fuerzas en las que intervienen distribuciones continuas de cargas.

Es cuando las partículas se componen de grandes cantidades de electrones protones, por lo que dichas cargas están muy próximas unas de otras.

Puede ser buena aproximación manejar un gran conjunto de cargas puntuales distribución continua de carga eléctrica.

Para evaluar la fuerza eléctrica se realizan los siguientes pasos:



- Se divide la distribución continua de carga en pequeños elementos de Δq.
- Se aplica la ley de Coulomb para calcular la fuerza eléctrica sobre la carga de prueba.

$$\Delta F = \frac{1}{4\pi \in_0}\frac{q'\Delta q}{r^2}\boldsymbol{r}$$

- Se evalúa la fuerza total sobre la carga de prueba, debido a la distribución continua de cargas, sumando las contribuciones de todos los elementos de carga. Este valor de la fuerza es aproximado

$$\boldsymbol{F} \cong \frac{q'}{4\pi \in_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\boldsymbol{r}_i$$

- Como la separación entre los elementos de la distribución de carga es pequeño comparado con la distribución a ρ, entonces podemos decir que el límite de $\Delta q \rightarrow 0$

$$\boldsymbol{F} = \frac{q'}{4\pi \in_0}\lim_{\Delta q_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\boldsymbol{r}_i$$

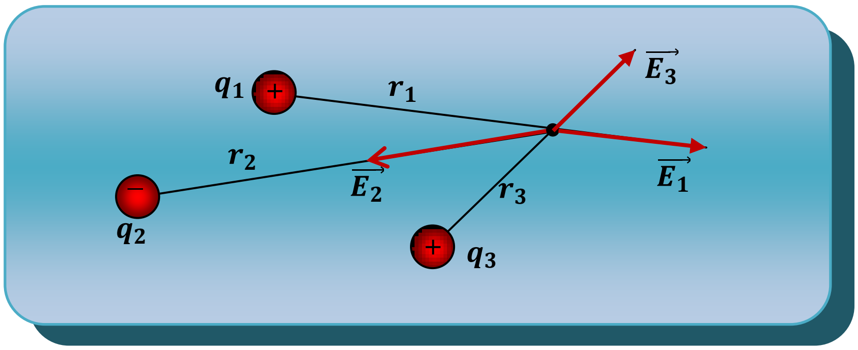
$$\boldsymbol{F} = \frac{q'}{4\pi \in_0}\int\frac{db}{r^2}\boldsymbol{r}$$

En donde la integración es una operación vectorial.

punto es una propiedad que depende exclusivamente de la carga fuente $\boldsymbol{q}$ y no de la interacción con cualquier carga ubicada en esta posición.

Campo creado por una distribución de cagas

Un campo eléctrico puede ser originado por una distribución de cargas fuentes puntuales fijas en diferentes puntos del espacio. Si las cargas fijas son $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$ y $\boldsymbol{q_3}$ cuyas distancias a un punto $\boldsymbol{P}$ son respectivamente $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ y $\boldsymbol{r_3}$ las intensidades del campo eléctrico que originan cada carga en $\boldsymbol{P}$ son $\vec{\boldsymbol{E}}_1$, $\vec{\boldsymbol{E}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{E}}_3$



La intensidad del campo eléctrico resultante $\vec{\boldsymbol{E}}_R$ en el punto se obtiene calculando separadamente las intensidades $\vec{\boldsymbol{E}}_1$, $\vec{\boldsymbol{E}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{E}}_3$ que cada carga origina en el punto y luego efectuando la suma vectorial de estas intensidades, es decir:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_R = \vec{\boldsymbol{E}}_1 + \vec{\boldsymbol{E}}_2 + \vec{\boldsymbol{E}}_3$$

Para $\boldsymbol{n}$ cargas fuentes se tiene, en general:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_R = \vec{\boldsymbol{E}}_1 + \vec{\boldsymbol{E}}_2 + \vec{\boldsymbol{E}}_3 + \cdots + \vec{\boldsymbol{E}}_n$$

Líneas de campo eléctrico

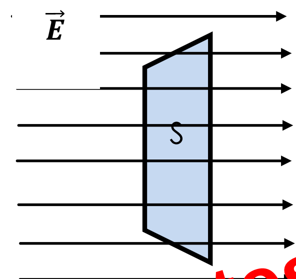
Una forma de dibujar el campo eléctrico sin tantos vectores es usar las líneas de campo(o líneas de fuerza), son líneas imaginarias que se dibujan siguiendo la dirección del campo y ayudan a visualizar cómo va variando la dirección del campo eléctrico al pasar de un punto a otro del espacio. Indican las trayectorias que seguiría la unidad de carga positiva si se la abandona libremente, por lo que las líneas de campo salen de las cargas positivas (fuentes) y llegan a las cargas negativas (sumideros). Siguen siendo una manera conveniente de representarse en la mente la forma de los campos eléctricos. Se las usa con este fin, pero en general no se las usa cuantitativamente.

Una ayuda conveniente para visualizar los patrones del campo eléctrico es trazar líneas en la misma dirección que el vector de campo eléctrico en varios puntos. Estas líneas se conocen como líneas del campo eléctrico y están relacionadas con el campo eléctrico en alguna región del espacio de la siguiente manera: El vector campo eléctrico es tangente a la línea de campo eléctrico en cada punto.

El campo eléctrico puede representarse mediante unas líneas imaginarias denominadas líneas de campo y, por analogía con el flujo de masa, puede calcularse el número de líneas de campo que atraviesan una determinada superficie. Una superficie puede ser representada mediante un vector dS de módulo el área de la superficie, dirección perpendicular a la misma y sentido hacia afuera de la curvatura. Conviene resaltar que en el caso del campo eléctrico no hay nada material que realmente circule a través de dicha superficie.

Flujo de un campo vectorial uniforme

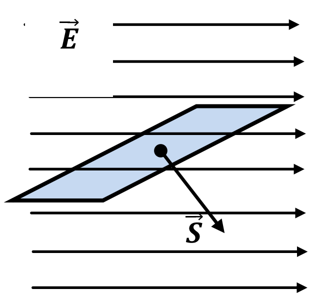
En primer lugar, imaginemos un rio donde la corriente del agua representaría un campo vectorial $\vec{E}$, supongamos además, que en dicha región sumergimos una superficie simple imaginaria de área cuadrada.

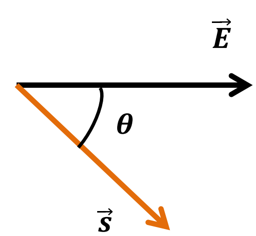


El agua a partir de este momento pasa a través de la superficie, por lo tanto, el flujo es la cantidad de agua que pasa por el área (S) en un intervalo de tiempo determinado. Entonces, llamaremos al caudal flujo hidráulico (φ_h) del campo vectorial ($\vec{E}$) a través de la superficie de área (S), entonces:

$$\varphi_h = E \cdot S$$

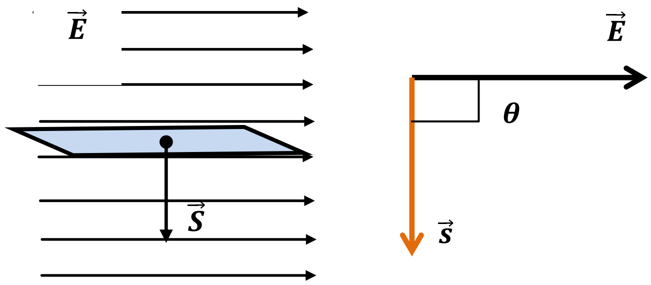
Si inclinamos el elemento de área con respecto a la dirección de la corriente notaremos que pasa menos flujo de agua a través de él, lo que nos indica que el flujo depende del ángulo entre la dirección del flujo y el elemento de área. Un truco matemático para cuantificar esta situación es representar una superficie de área como un vector ($\vec{S}$), cuyo módulo es igual al área, la dirección es perpendicular a la misma, y el sentido definido por la regla de la mano derecha y expresar el flujo mediante el producto escalar del vector campo por el vector de superficie.





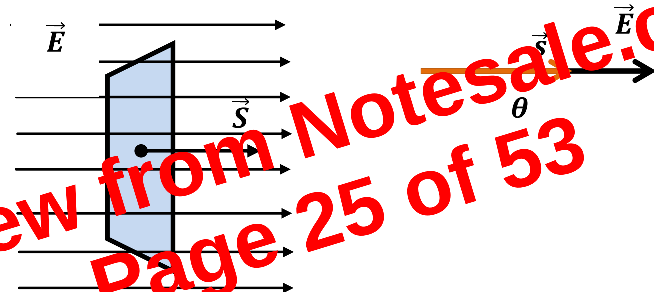
$$\varphi_h = \vec{E} \cdot \vec{S} \cdot \cos\theta$$

Así cuando los dos vectores sean perpendiculares el producto escalar es cero y efectivamente porque en esa posición no pasa flujo a través de la superficie como en este caso:



$$\varphi_h = \vec{E} \cdot \vec{S} \cos 90° = 0$$

Y cuando los dos vectores son paralelos el producto escalar es máximo porque en esta posición pasa la mayor cantidad de flujo a través de la superficie.



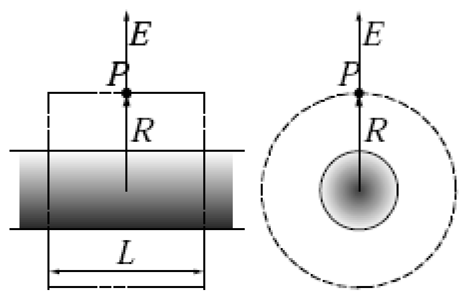
$$\varphi_h = \vec{E} \cdot \vec{S} \cos 0° = E \cdot S$$

Flujo de un campo vectorial no uniforme

Cuando el campo no es uniforme, esto sigue siendo cierto para una superficie infinitesimal, es decir tan pequeña como sea necesaria para que un elemento infinitesimal de flujo si sea uniforme en ese tramo. Imaginemos un mallado que subdivida la superficie en fragmentos diferencialmente pequeño $\Delta\vec{s}$, en estas condiciones podemos obtener un diferencial de flujo ($\Delta\varphi$) mediante el producto escalar del campo $\vec{E}$ por el diferencial de superficie infinitesimal $\Delta\vec{s}$ que atraviesa el flujo. En el mallado de la superficie, nos situamos sobre uno de los elementos, y sobre él identificamos los vectores $\vec{E}$ y $\Delta\vec{s}$. Luego efectuamos el producto escalar $\vec{E} \cdot \Delta\vec{s}$ correspondiente al elemento elegido y el resultado (escalar) lo guardamos. Pasamos a otro elemento y repetimos el procedimiento. Así sucesivamente hasta recorrer todos los elementos de la superficie.

vector superficie son perpendiculares allí. Por tanto el flujo a través de toda la superficie cerrada es el que atraviesa la superficie cilíndrica:

$$\boldsymbol{\Phi} = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{S_L} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_{S_L} \boldsymbol{E ds} = \boldsymbol{E} \int_{S_L} \boldsymbol{ds} = \boldsymbol{E(2\pi RL)}$$



Como la superficie es cerrada,

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

$\boldsymbol{q}$ es la carga del volumen interior a la superficie. En la figura esa superficie se ha dibujado exterior a la distribución, pero puede ser interior. En ambos casos q es la carga del volumen interior a esa superficie. Igualando los últimos miembros de las dos últimas ecuaciones,

$$\boldsymbol{E2\pi RL} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon}_0}$$

Y

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_0 RL}}$$

Campo de distribuciones planas de gran superficie

Supondremos que la densidad superficial de carga $\boldsymbol{\sigma}$ es uniforme. Si consideramos una superficie cilíndrica con bases iguales de área S paralelas a la distribución, una a cada lado y equidistantes de ella, como, por las dimensiones de la distribución plana, el campo es perpendicular a la superficie, su flujo a través de esa superficie cilíndrica es solo el de las dos bases:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{2ES} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \frac{\boldsymbol{\sigma S}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$

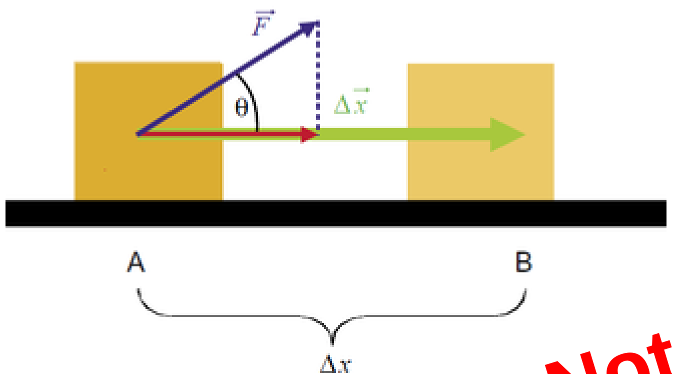
Se ha aplicado la ley de Gauss. Resulta que

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}$$

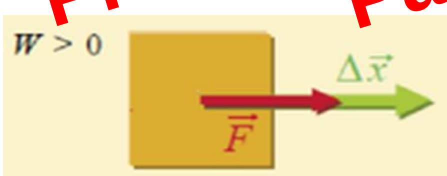
ser positivo si el sistema gana energía, negativo si el sistema pierde energía o nulo si no pierde ni gana energía.

La fuerza y el desplazamiento son magnitudes vectoriales, sin embargo, en el trabajo sólo se tiene en cuenta la componente de la fuerza que actúa en la dirección de desplazamiento del cuerpo, por lo que el trabajo es una magnitud escalar. El producto escalar nos permite obtener un escalar (un numero) de la operación de dos vectores. En términos físicos, el trabajo ($\boldsymbol{W}$) se define como el producto escalar del modulo de la componente de la fuerza ($\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}}$) que actúa en la dirección de desplazamiento por el módulo de la distancia recorrida ($\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{x}}$).

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{F}\cos\boldsymbol{\theta}) \cdot \Delta\boldsymbol{x}$$

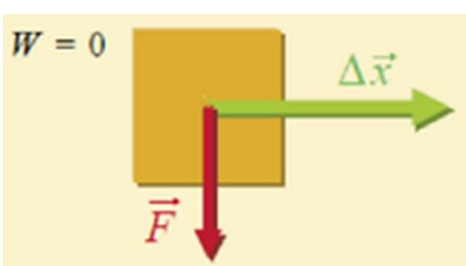


Como hemos visto, en la ecuación el término función coseno aplicada a un ángulo nos permitirá saber cuando el trabajo es negativo, positivo o nulo.



Cuando el trabajo es positivo, se dice que la fuerza inductora ha aportado energía. En este caso la fuerza y el desplazamiento forman un ángulo menor a ± 90°, siendo máximo cuando la fuerza y el desplazamiento van en la misma dirección y sentido ($\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$°, cos 0° =1)

Si el trabajo es negativo, se dice que la fuerza inductora ha absorbido energía. En este caso la fuerza y el desplazamiento forman un ángulo mayor a ±90° hasta los ±180°, siendo máximo, pero de forma negativa cuando el ángulo es 180, pues cos 180° = -1



Si el trabajo es nulo, no existen variaciones en el balance energético del sistema. En este caso la fuerza es perpendicular al desplazamiento ($\boldsymbol{\theta} = \mathbf{90}$°), por lo que el cos 90° = 0, por lo tanto el trabajo es cero.

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = Area\ debajo\ de\ la\ curva$$

En conclusión podemos afirmar que:

El trabajo de una fuerza, variable o no, es igual al área encerrada bajo la curva en un gráfico* fuerza-posición *entre dos posiciones cualesquiera y se calcula desarrollando la integración de todos los productos entre el valor de la fuerza y el diferencial de desplazamiento en un punto dado a lo largo de un trayecto.

Trabajo de una fuerza variable en un campo vectorial

Consideremos una partícula P sobre la que actúa un campo de fuerza $(\vec{E})$ en el espacio. Si la partícula se mueve a lo largo de una curva L, que viene dada por el vector de posición $\vec{r}(t)$, desde un punto (a) hasta un punto (b), y el campo es función de la posición de la partícula, esto es $F(r(t))$, entonces mientras el campo de fuerzas actúa sobre ella, realizará un trabajo (W) a través de la trayectoria. Para calcular este trabajo se hace una partición de la curva L y se calcula el trabajo elemental (ΔW) realizado por $(\vec{E})$ para mover una partícula sobre un pequeño segmento cualquiera de la curva. El trabajo total será la suma de los trabajos sobre todos los segmentos considerados en L.

Los elementos que intervienen en la integral de un campo vectorial a lo largo de una curva son:

- La curva L, orientada y definida por su vector de posición $r(t)$, que comienza en (a) y termina en (b).
- El campo vectorial $E(x,y,z)$ definido y continuo sobre la curva L.
- El vector de posición $r(t)$ **sobre la curva** L
- El ángulo θ, que representa el ángulo entre los vectores F y F_s que es la componente de la fuerza F en la dirección del desplazamiento elemental Δr.
- El desplazamiento elemental $\Delta\vec{r}$
- El segmento elemental de longitud de la curva Δl