donc : $\Big[(\mathcal{O} \vee \mathcal{P}) \wedge \mathcal{Q}\Big] \Longleftrightarrow \Big[(\mathcal{O} \wedge \mathcal{P}) \vee (\mathcal{O} \wedge \mathcal{Q})\Big]$.

4. De même, dans le tableau suivant on remarque que les propositions $\Big[(\mathcal{O} \wedge \mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}\Big]$ et $\Big[(\mathcal{O} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})\Big]$ ont les mêmes valeurs de vérité.

$\mathcal{O}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathcal{P}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\mathcal{Q}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$(\mathcal{O} \wedge \mathcal{P})$	0	0	0	0	0	0	1	1
$(\mathcal{O} \wedge \mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}$	0	1	0	1	0	1	1	1
$(\mathcal{O} \vee \mathcal{Q})$	0	1	0	1	1	1	1	1
$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$	0	1	1	1	0	1	1	1
$(\mathcal{O} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$	0	1	0	1	0	1	1	1

donc : $\Big[(\mathcal{O} \wedge \mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}\Big] \Longleftrightarrow \Big[(\mathcal{O} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})\Big]$.

5. Notons $\mathcal{R}$ la proposition logique :

$$\Big[\Big((\mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})\Big) \Longrightarrow (\mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{Q})\Big]$$

En utilisant la définition de l'implication et les propriétés précédentes, on obtient :

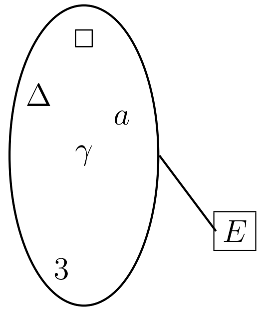
$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{R} & \Longleftrightarrow & \Big[\Big((\mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})\Big) \Longrightarrow (\mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{Q})\Big] \\
& \Longleftrightarrow & \Big[(\mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \vee \overline{\Big((\mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})\Big)}\Big] \\
& \Longleftrightarrow & \Big[(\mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \vee \Big(\overline{(\mathcal{O} \Longrightarrow \mathcal{P})} \vee \overline{(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})}\Big)\Big] \\
& \Longleftrightarrow & \Big[(\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{O}}) \vee \Big(\overline{(\mathcal{P} \vee \overline{\mathcal{O}})} \vee \overline{(\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}})}\Big)\Big] \\
& \Longleftrightarrow & \Big[(\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{O}}) \vee \Big((\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\overline{\mathcal{O}}}) \vee (\overline{\mathcal{Q}} \wedge \overline{\overline{\mathcal{P}}})\Big)\Big] \\
& \Longleftrightarrow & \Big[(\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{O}}) \vee \Big((\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{O}) \vee (\overline{\mathcal{Q}} \wedge \mathcal{P})\Big)\Big]
\end{array}$$

Ainsi, pour montrer que la proposition $\mathcal{R}$ est vraie, il suffit de montrer que toutes ses valeurs de vérité sont égales à 1. On a :

$\mathcal{O}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$\mathcal{P}$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\mathcal{Q}$	0	1	0	1	0	1	0	1
$\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{O}}$	1	1	1	1	0	1	0	1
$\overline{\mathcal{P}} \wedge \mathcal{O}$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\overline{Q} \wedge P$	0	0	1	0	0	0	1	0
$\mathcal{R}$	1	1	1	1	1	1	1	1

ce qui montre la véracité de $\mathcal{R}$, donc la transitivité de l'implication.

□



L'ensemble $E = \{a, \square, \gamma, \Delta, 3\}$.

L'un des axiomes de la téorie des ensembles, est que :

Il existe un ensemble, appelé l'*ensemble vide* et noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément.

On a alors $Card(\emptyset) = 0$.

Un ensemble contenant un seul élément est appelé "*Singleton*", donc de cardinal égal à 1.

2.1.1 Les quantificateurs

On utilise les symboles suivants :

1. $\exists$ le quantificateur existentiel. On écrit $\exists x$ pour lire "*Il existe* x".
2. $\forall$ le quantificateur universel. On écrit $\forall x$ pour lire "*Pour tout* x".
3. On écrit $\exists! x$ pour lire "*Il existe un unique* x".

En utilisant ces quantificateurs, pour A un ensemble on a :

- $A = \emptyset \iff \forall x\, (x \notin A)$
- $$\begin{array}{lcl} A \text{ est un singleton} & \iff & \exists!\, x\, (x \in A) \\ & \iff & \exists x\, \Big((x \in A) \wedge \Big(\forall y\, (y \in A \Longrightarrow y = x)\Big)\Big) \end{array}$$

2.1.2 Parties d'un ensemble

Définition 2.2 *On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, ou que A est une partie de l'ensemble B, ou que A est un sous ensemble de B si tout élément de A est un élément de B. On note $A \subset B$ et on a formellement :*

$$A \subset B \iff \forall\ x(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

Quand A n'est pas une partie de B, on note $A \not\subset B$ et on a formellement :

$$A \not\subset B \iff \exists x\, ((x \in A) \wedge (x \notin B))$$

Définition 2.5 *Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont deux ensembles disjoints, et si de plus $E = A \cup B$, on dit que A est le complémentaire de B dans E, ou que A et B sont deux ensembles complémentaires dans E, et on note :*

$$A = \complement_E B \quad ou \quad B = \complement_E A$$

On note aussi :

$$A = E \backslash B$$

En d'autres termes,

Propriété 2.3 *Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble $\complement_E A$ des éléments de E qui ne sont pas dans A.*

Formellement on a :

$$\boxed{\complement_E A = \Big\{x \in E;\ x \notin A\Big\}}$$

Avant de donner un exemple, on remarque que si E est un ensemble alors $\emptyset \subset E$ et $(\forall\, x \in E,\ x \notin \emptyset)$, donc : $\complement_E \emptyset = E$.

Exemple 2.3 *Soient $E = \Big\{1, a, \alpha, 3, l, \gamma, \Box, \ell, \clubsuit, \spadesuit\Big\}$ et $A = \Big\{1, a, \alpha, \spadesuit\Big\}$, alors :*

$$\complement_E A = \Big\{3, l, \gamma, \Box, \ell, \clubsuit\Big\}$$

Propriété 2.4 *Soient E un ensemble et A et B deux parties de E, alors :*

1. $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.
2. $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$.
3. $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \bigcup \complement_E B$
4. $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \bigcap \complement_E B$

Preuve :

1. On a

$$\begin{array}{rcll} A \subset B & \Longleftrightarrow & \forall\, x \in E\ \Big((x \in A) \Longrightarrow (x \in B)\Big) & \\ & \Longleftrightarrow & \forall\, x \in E\ \Big((x \notin B) \Longrightarrow (x \notin A)\Big) & \text{Contrapposée de l'implication} \\ & \Longleftrightarrow & \forall\, x \in E\ \Big((x \in \complement_E B) \Longrightarrow (x \in \complement_E A)\Big) & \\ & \Longleftrightarrow & \complement_E B \subset \complement_E A & \end{array}$$

donc

$$A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A\ .$$

Cette correspondance est une application malgré qu'il existe des éléments de F qui n'ont pas d'antécedents dans E et plusieurs éléments de E qui ont une même image dans F.

Définition 2.9 *On dit que deux applications f et g sont égales si :*

1. *Elles ont un même ensemble de départ E et un même ensemble d'arrivée F.*
2. $\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$.

Exemple 2.11 *On considère les applications suivantes*[4] *:*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \qquad k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

alors :

$f \neq g$, *car elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée.*
$f \neq h$, *car elles n'ont pas le même ensemble de départ.*
$f \neq k$, *car elles n'ont pas ni le même ensemble de départ ni le même ensemble d'arrivée.*

Définition 2.10 *On appelle graphe d'une application $f : E \longrightarrow F$, l'ensemble*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in E\}$$

En fait, la définition d'une application f revient à la donnée d'un sous ensemble Γ_f de $E \times F$ tel que

$$\forall (x,y),\ (x',y') \in \Gamma_f, \quad \Big((x,y) = (x',y') \Longleftrightarrow x = x'\Big)$$

2.2.1 Composition d'applications

Définition 2.11 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :*

$$\forall x \in E, \quad gof(x) = g(f(x))$$

Cette application[5] *est appelée composée des applications f et g.*

Exemple 2.12 *Etant données les applications*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & x^2 \end{array} \quad et \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & x^3 \end{array}$$

alors

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & (x^2)^3 = x^6 \end{array} \quad et \quad f \circ g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longrightarrow & (x^3)^2 = x^6 \end{array}$$

Il est claire que $\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$.

[4] $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

[5] $g \circ f$ est une application car pour $x,\ x' \in E$, si $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$ car f est une application et comme g est une application alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.

2. $\Big(g\circ f \ \ surjective\Big) \Longrightarrow g \ \ surjective.$

3. Si $f(E) = F'$, *alors* $\Big(g\circ f \ \ injective\Big) \Longrightarrow g \ \ injective.$

Preuve : Comme $F \subset F'$, alors $g\circ f : E \longrightarrow G$ est bien définie.

1. Supposons que $g\circ f$ est injective et montrons que f est injective. Soient $x,\ x' \in E$, alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Longrightarrow g\Big(f(x)\Big) = g\Big(f(x')\Big) \qquad \text{car } g \text{ est une application} \\ &\Longrightarrow g\circ f(x) = g\circ f(x') \\ &\Longrightarrow x = x' \qquad \text{car } g\circ f \text{ est injective} \end{aligned}$$

donc :

$$\forall\, x,\ x' \in E, \qquad \Big(f(x) = f(x')\Big) \Longrightarrow \Big(x = x'\Big)$$

ce qui montre que f est injective.

2. Supposons que $g\circ f$ est surjective et montrons que g est surjective. Soit $z \in G$, alors

$$\begin{aligned} g\circ f \text{ surjective} &\Longrightarrow \exists x \in E; \quad g\circ f(x) = z \\ &\Longrightarrow \exists x \in E; \quad g\Big(f(x)\Big) = z \\ &\Longrightarrow \exists y = f(x) \in F; \qquad g(y) = z \end{aligned}$$

donc

$$\forall\, z \in G,\ \exists y \in F; \quad g(y) = z$$

ce qui montre que g est surjective.

3. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F' \longrightarrow G$, avec $F' = f(E)$. Supposons que $g\circ f$ est injective et montrons que g est injective. Soient $y,\ y' \in F' = f(E)$, alors il existe $x,\ x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ donc :

$$\begin{aligned} g(y) = g(y') &\Longrightarrow g\Big(f(x)\Big) = g\Big(f(x')\Big) \\ &\Longrightarrow g\circ f(x) = g\circ f(x') \\ &\Longrightarrow x = x' \quad \text{car } g\circ f \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow f(x) = f(x') \quad \text{car } f \text{ application} \\ &\Longrightarrow y = y' \end{aligned}$$

ce qui montre que g est injective.

□

2.2.5 Fonctions

Définition 2.15 *On appelle fonction de E dans F, toute application f d'un sous ensemble $\mathcal{D}_f \subset E$ dans F. $\mathcal{D}_f$ est appelé "Ensemble de définition de f".*

Remarque 2.7 *Toutes les notions données pour les applications peuvent être adaptées pour les fonctions.*

Propriété 3.1 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E, alors*

$$\forall\ x,\ y \in E,\ (\dot{y} \cap \dot{x} = \emptyset) \vee (\dot{y} = \dot{x})$$

Preuve : Soient $x,\ y \in E$, supposons que $\dot{y} \cap \dot{x} \neq \emptyset$ alors il existe $z \in \dot{y} \cap \dot{x}$, donc $z\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}x$.
Montrons alors que $\dot{y} = \dot{x}$.
Soit $u \in \dot{x}$, alors

$$\Big((u\mathcal{R}x) \wedge (z\mathcal{R}x)\Big) \wedge (z\mathcal{R}y)$$

comme $\mathcal{R}$ est symétrique et transitive, on déduit que

$$(u\mathcal{R}z) \wedge (z\mathcal{R}y)$$

et de la transitivité de $\mathcal{R}$ on déduit que $u\mathcal{R}y$, par suite $u \in \dot{y}$, ce qui montre que $\dot{x} \subset \dot{y}$.
De la même manière, on montre que $\dot{y} \subset \dot{x}$, ce qui termine la preuve de la propriété. □

De cette propriété on déduit que :

$$E_{/\mathcal{R}} \ \textbf{est une partition de l'ensemble}\ E.$$

Exemple 3.3 *Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par :*

$$\forall x,\ y \in E, \qquad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Preuve :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive, car f étant une application alors : $\forall x \in E,\ f(x) = f(x)$, donc

$$\forall x \in E, \qquad x\mathcal{R}x.$$

2. $\mathcal{R}$ est transitive, car pour tous $x,\ y,\ z \in E$ on a :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = f(y) \\ f(y) = f(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) = f(z)$$

ce qui montre que :

$$\forall x,\ y,\ z \in E, \quad \Big((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)\Big) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z).$$

3. $\mathcal{R}$ est symétrique, car pour tous $x,\ y \in E$,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) = f(x)$$

donc

$$\forall x,\ y \in E, \qquad (x\mathcal{R}y) \Longrightarrow (y\mathcal{R}x)$$

ce qui montre que la relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation déquivalence. □

3.1.1 Décomposition d'une application

Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$, on note $E_{/\mathcal{R}}$ le quotient de E par la relation $\mathcal{R}$ et pour toute classe $\dot{x}$ on pose $\widetilde{f}\,(\dot{x}) = f(x)$, alors :

$\widetilde{f}$ est une application de $E_{/\mathcal{R}}$ dans F injective et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E & & F \\ x \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathfrak{s}"'] & & f(x) \\ \dot{x} \arrow[urr, "\widetilde{f}"'] & & \\ E_{|\mathcal{R}} & & \end{tikzcd}$$

Décomposition de l'application f.

En effet :

1. Montrer que $\widetilde{f}$ est une application revient à montrer que $\widetilde{f}\,(\dot{x})$ ne dépend pas du représentant de la classe $\dot{x}$.
Soient $x,\ y \in E$ tels que $\dot{x} = \dot{y}$, alors $x\mathcal{R}y$, donc $f(x) = f(y)$, par suite :

$$\widetilde{f}\,(\dot{x}) = f(x) = f(y) = \widetilde{f}\,(\dot{y})$$

donc :

$$\forall\, \dot{x},\ \dot{y} \in E_{/\mathcal{R}}, \qquad (\dot{x} = \dot{y}) \Longrightarrow \left(\widetilde{f}\,(\dot{x}) = \widetilde{f}\,(\dot{y})\right)$$

ce qui montre que $\widetilde{f}$ est une application de $E_{/\mathcal{R}}$ dans F.

2. Montrons que $\widetilde{f} : E_{/\mathcal{R}} \longrightarrow F$ est injective.
Soient $\dot{x},\ \dot{y} \in E_{/\mathcal{R}}$, alors

$$\begin{array}{rcll} \left(\widetilde{f}\,(\dot{x}) = \widetilde{f}\,(\dot{y})\right) & \Longleftrightarrow & f(x) = f(y) & \\ & \Longleftrightarrow & x\mathcal{R}y & \\ & \Longleftrightarrow & \dot{x} = \dot{y} & \text{d'après la propriété } 3.1 \end{array}$$

ce qui montre que $\widetilde{f}$ est injective.

3. Le diagramme est commutatif car :

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) = \widetilde{f}\,(\dot{x}) = \widetilde{f}\,(\mathsf{s}(x)) = \widetilde{f} \circ \mathsf{s}(x)$$

donc

$$f = \widetilde{f} \circ \mathsf{s}$$

$\square$

3. *Si E est totalement ordonné par $\preceq$, alors tout sous ensemble fini A de E admet un plus petit éléments et un plus grand élément.*

Exemple 3.8 *Soient $F = \{1, a, 2, 5, \gamma\}$, l'ensemble $E = \mathcal{P}(F)$ ordonné par la relation $\subset$ et une partie $A = \Big\{\{a, 2\}, \{2, 5, \gamma\}, \{1, 2, \gamma\}, \{a, 2, 5\},\Big\}$, alors :*

1. *Les mimorants de A sont : $\emptyset$ et $\{a\}$.*
2. $\mathrm{Inf}A = \{a\}$.
3. *A n'a pas de plus petit élément, car $\mathrm{Inf}A \notin A$.*
4. *Le seul majorant de A est : $F = \{1, a, 2, 5, \gamma\}$.*
5. $\mathrm{Sup}A = F$.
6. *A n'a pas de plus grand élément, car $\mathrm{Sup}A \notin A$.*

Proposition 3.1 *Soient $(E, \preceq)$ un ensemble totalement ordonné[2] et A et B deux sous ensembles de E dont les bornes inférieures et supérieures existent, alors :*
- $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
- $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$
- $\sup(A \cap B) \preceq \min\{\sup A, \sup B\}$
- $\max\{\inf A, \inf B\} \preceq \inf(A \cap B)$

Preuve : Soient $M = \max\{\sup A, \sup B\}$ et $m = \min\{\inf A, \inf B\}$, alors :

$$\begin{aligned} \forall x (x \in A \cup B & \Longrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)) \\ & \Longrightarrow (x \preceq \sup A) \vee (x \preceq \sup B) \\ & \Longrightarrow (x \preceq M) \vee (x \preceq M) \\ & \Longrightarrow (x \preceq M) \end{aligned}$$

ce qui montre que M est un majorant de $A \cup B$.
Montrons que M est le plus petit des majorants de $A \cup B$. Soit M' un majorant de $A \cup B$, il est évident que M' est alors un majorant de A et de B, donc

$$(\sup A \preceq M') \wedge (\sup B \preceq M')$$

par suite

$$\max\{\sup A,\, \sup B\} \preceq M'$$

d'où on déduit que : $M = \sup(A \cup B)$.

La preuve des autres propriétés est similaire.

□

Remarque 3.2 *La seule relation d'ordre et d'équivalence, à la fois, est la relation égalité.*

[2]On a supposé que l'ordre est total pour assurer l'existence de $\max\{\sup A, \sup B\}$, $\min\{\sup A, \sup B\}$, $\max\{\inf A, \inf B\}$ et de $\min\{\inf A, \inf B\}$.

Définition 4.11 *Soit $(A,+,\bullet)$ un anneau commutatif. On dit que $y \in A^*$ divise $x \in A$, ou que y est un diviseur de x ou que x est divisible par y, si*

$$\exists\ z \in A^*, \quad x = y \bullet z.$$

Si 0_A ne possède pas de diviseur dans A, on dit que $(A,+,\bullet)$ est un anneau intègre ou un anneau d'intégrité.

4.3.1 Sous Anneaux

Définition 4.12 *On appelle sous anneau de $(A,+,\bullet)$, tout sous ensemble A' de A tel que muni des restrictions des lois $+$ et $\bullet$ est anneau.*
Si A est un anneau unitaire et $1_A \in A'$, on dit que A' est sous anneau unitaire.

On a la cartérisation suivante des sous anneaux.

Propriété 4.16 *Un sous ensemble A' de A est un sous anneau si et seulement si :*
1. $A' \neq \emptyset$,
2. $\forall\ x,\ y \in A',\ \ (x - y) \in A'$
3. $\forall\ x,\ y \in A',\ \ (x \bullet y) \in A'$.

Preuve : On sait que A' est est un sous groupe de $(A,+)$ si et seulement si

$$(A' \neq \emptyset) \wedge (\forall\ x,\ y \in A',\ (x - y) \in A'),$$

donc pour que A' soit un sous anneau de A, il suffit de voir si la restriction de la deuxième loi $\bullet$ est interne dans A', ce qui revient à dire que $(\forall\ x,\ y \in A',\ x \bullet y \in A')$, ce qui termine la preuve de notre proposition.

□

4.3.2 Homomorphismes d'Anneaux

Soient $(A,+,\bullet)$ et $(B,\oplus,\otimes)$ deux anneaux et $f : A \longrightarrow B$.

Définition 4.13 *On dit que f est un homomorphisme d'anneaux si :*

$$\forall\ x,\ y \in A, \quad f(x+y) = f(x) \oplus f(y) \ \ \text{et} \ \ f(x \bullet y) = f(x) \otimes f(y)$$

- *Si $A = B$ on dit que f est un endomorphisme d'anneau de A.*
- *Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme d'anneaux*
- *Si f est bijective et $A = B$, on dit que f est un automorphisme d'anneaux.*

On sait que l'image de l'élément neutre du groupe de départ d'un homomorphisme de groupe est l'élément neutre du groupe d'arrivée. Par contre, l'image de l'élément unité de l'anneau de départ par un homomorphisme d'anneau n'est pas toujours l'élément unité de l'anneau d'arrivée. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre dans un anneau unitaire $(A,+,\cdot)$,