

ETUDE DE SOLLICITATIONS SIMPLES

I - TRACTION OU COMPRESSION 36

 I - 1 Définition..... 36

 I - 2 Déformations et contraintes..... 36

II - TORSION..... 37

 II - 1 Définition..... 37

 II - 2 Déplacement, contraintes, déformations 37

 II - 3 Exemple 39

III - FLEXION..... 40

 III - 1 Flexion pure 40

 III - 2 Flexion pure plane 40

 III - 3 Flexion plane simple 41

 III - 4 Exemples 42

 III - 5 Etude de la déformation des poutres en flexion 44

METHODES ENERGETIQUES

I - THEOREMES DE L'ENERGIE EN ELASTICITE LINEAIRE 49

 I - 1 Notations et définitions..... 49

 I - 2 Théorème fondamental 50

II - ENERGIE DE DEFORMATION EN RDM 51

 II - 1 Cas général 51

 II - 2 Cas particulier de la Traction/Compression 51

 II - 3 Cas particulier de la flexion plane simple..... 52

 II - 4 Cas particulier de la torsion..... 52

III - THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETTI..... 53

IV - THEOREME DE CASTIGLIANO ET APPLICATIONS 54

 IV - 1 Théorème de Castigliano 54

 IV - 2 Conséquence: Principe du travail minimum ou théorème de Ménabréa 55

 IV - 3 Exemples 56

V - EQUATION DE BERTRAND DE FONTVIOLANT..... 58

 V - 1 Énoncé..... 58

 V - 2 Application: Evaluation des réactions hyperstatiques surabondantes 59

 V - 3 Application: Détermination des déplacements et rotations 60

FLAMBEMENT

I - STABILITE D'UNE POUTRE EN COMPRESSION 62

II - ETUDE DE QUELQUES CAS SIMPLES..... 63

 II-1 Colonne Rotule-Rotule 63

Preview from Notesale.co.uk
Page 5 of 87

RAPPELS DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

I - Cinématique

I - 1 Configuration, mouvement, déplacement, ...

L'espace physique est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. L'ensemble des particules ou points matériels constituant le milieu continu étudié, occupe à chaque instant t , un ensemble de positions dans l'espace: c'est la **configuration** du système à l'instant t , noté $\bar{\Omega}(t)$ (d'intérieur $\Omega(t)$ et de frontière $\partial\Omega(t)$).

On introduit aussi la notion de **configuration de référence**: c'est la configuration particulière du système à un instant t_0 fixé. Souvent on prendra $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}(0)$, et on parlera alors de **configuration initiale**.

Toute particule M_0 de $\bar{\Omega}_0$ est repérée par son vecteur position $\vec{X}(t_0)$ dans la configuration de référence. Toute particule M de $\bar{\Omega}(t)$ est repérée par son vecteur position $\vec{x}(t)$ dans la configuration actuelle (à l'instant t).

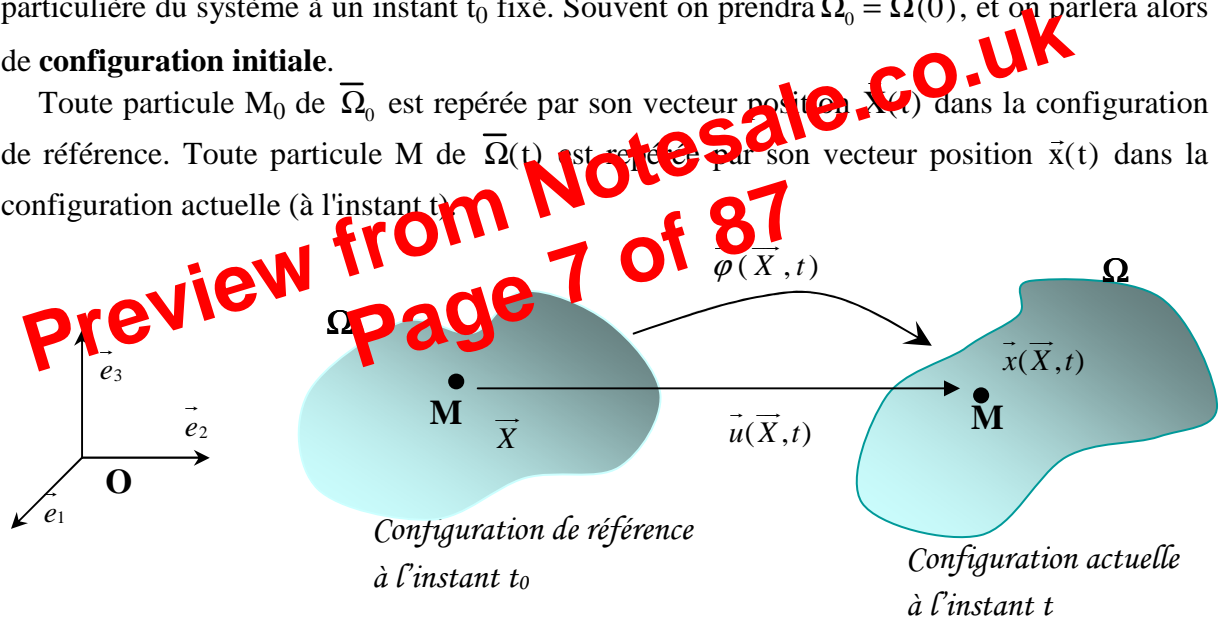


Figure 1

La position de chaque particule M sera donc déterminée si on connaît sa position dans la configuration de référence et une fonction Φ telle que:

$$\vec{x}(t) = \Phi(\vec{X}, t) \tag{1}$$

Φ définit le mouvement par rapport à $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Dire que le milieu est continu, c'est dire que Φ est une fonction continue et biunivoque de X .

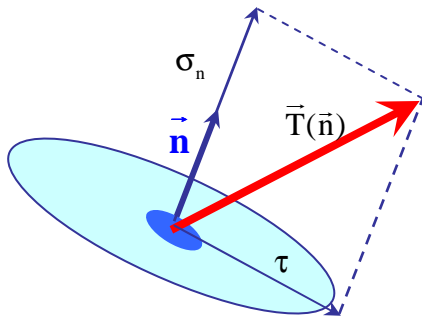
\vec{X} et t définissent les variables de *Lagrange*

\vec{x} et t définissent les variables d'*Euler*

II - 4 Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique. Dans tous les développements à venir, nous nous placerons dans le cas des petites perturbations pour un solide en équilibre. En conséquence, nous omettrons les variables x et t .

II - 4.1 Contrainte normale et contrainte tangentielle



Considérons une facette de normale \vec{n} . Tout naturellement, le vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{n})$ peut être décomposé en une composante normale σ_n et une composante tangentielle τ .

$$\sigma_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

et

$$\|\tau\| = \sqrt{(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2 - (\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n})^2}$$

On dira que σ_n est positive en traction et négative en compression.

II - 4.2 Directions principales, contraintes principales

La matrice représentant le tenseur des contraintes est symétrique, elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres sont réelles et appelées **contraintes principales** ($\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$). Les vecteurs propres, orthogonaux deux à deux, sont les **directions principales** ($\vec{n}_I, \vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$). On a donc:

$$\sigma_I = \vec{T}(\vec{n}_I) \cdot \vec{n}_I, \sigma_{II} = \vec{T}(\vec{n}_{II}) \cdot \vec{n}_{II}, \sigma_{III} = \vec{T}(\vec{n}_{III}) \cdot \vec{n}_{III}$$

II - 4.3 Invariants

Le tenseur des contraintes possède trois invariants définis mathématiquement comme les coefficients de l'équation caractéristique $\det(\vec{\sigma} - \alpha \vec{1})$. C'est à dire les quantité scalaires:

$$\Sigma_I = \text{Tr}(\vec{\sigma}) \tag{27}$$

$$\Sigma_{II} = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(\vec{\sigma})^2 - \text{Tr}(\vec{\sigma}^2) \right] \tag{28}$$

$$\Sigma_{III} = \text{Det}(\vec{\sigma}) \tag{29}$$

Exprimés en fonction des contraintes principales, on obtient

$$\Sigma_I = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$\Sigma_{II} = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_{III} \sigma_I$$

$$\Sigma_{III} = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}$$

II - 4.4 Cercles de Mohr

Connaissant le tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$, on se propose de déterminer le domaine engendré par l'extrémité du vecteur contrainte quand \vec{n} varie. Par commodité, nous nous

plaçons dans une base orthonormée dirigée suivant les directions principales de $\bar{\sigma}$. Soit

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \text{ et } \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ avec } n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

et

$$\bar{T} = \begin{Bmatrix} n_1 \sigma_1 \\ n_2 \sigma_2 \\ n_3 \sigma_3 \end{Bmatrix}$$

D'après (23)

$$\sigma_n = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2$$

et d'après (24)

$$\tau^2 + \sigma_n^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2$$

Dans l'hypothèse où les contraintes principales sont distinctes, on obtient alors après résolution du système:

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}$$

Si on ordonne les contraintes principales de telle sorte que $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, alors

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III}) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) \geq 0$$

ou encore

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \right)^2 \quad (30)$$

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right)^2 \quad (31)$$

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 \quad (32)$$

Dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte, d'après (31), est donc intérieure au cercle centré sur $0\sigma_n$ d'abscisse $(\sigma_I + \sigma_{III})/2$ et de rayon $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$. Par contre, d'après (30) (res. (32)), l'extrémité du vecteur contrainte est extérieure au cercle centré sur $0\sigma_n$ d'abscisses $(\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$ (resp. $(\sigma_I + \sigma_{II})/2$) et de rayon $(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2$ (resp. $(\sigma_I - \sigma_{II})/2$).

III - 2.3 Matériau élastique homogène orthotrope

Le matériau possède trois directions privilégiées deux à deux orthogonales. La loi de comportement est invariante par les symétries par rapport aux plans orthogonaux construits à partir de ces directions. Dans ces matériaux, on peut classer les tôles laminées, les composites tissés, le bois, certains bétons structurés, ...

Dans ce cas on montre que la matrice de comportement est définie par 9 paramètres indépendants. Dans le repère principal d'orthotropie, la loi se met sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Avec les conditions de symétrie

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

Preview from Notesale.co.uk
Page 23 of 87

III - 2.4 Matériau élastique homogène isotrope transverse

Un matériau homogène isotrope transverse est tel que la matrice de comportement est invariante par toute rotation autour d'un axe privilégié. En utilisant cette invariance, on montre que seuls 5 paramètres indépendants caractérisent le comportement. Si l'axe est porté par la direction 3, on a alors:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

III - Déformation et contraintes généralisées

III - 1 Déformations généralisées

D'après (2) en utilisant l'hypothèse des petites perturbations, et en négligeant les dérivées de v_2 et v_3 , on obtient

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_{1,1}^f + \omega_{2,1}X_3 - \omega_{3,1}X_2 & \text{Sym} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(u_{2,1}^f - \omega_{1,1}X_3 - \omega_3) & v_{2,2} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(u_{3,1}^f + \omega_{1,1}X_2 + \omega_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

En introduisant alors les six quantités

$$\begin{aligned} a_1(X_1) &= u_{1,1}^f(X_1) & \chi_1(X_1) &= \omega_{1,1}(X_1) \\ a_2(X_1) &= u_{2,1}^f(X_1) - \omega_3(X_1) & \chi_2(X_1) &= \omega_{2,1}(X_1) \\ a_3(X_1) &= u_{3,1}^f(X_1) + \omega_2(X_1) & \chi_3(X_1) &= \omega_{3,1}(X_1) \end{aligned} \quad (6)$$

on trouve de manière simple

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} a_1 + \chi_2 X_3 - \chi_3 X_2 & \text{Sym} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(a_2 - \chi_1 X_3) & v_{2,2} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(a_3 + \chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) & v_{3,3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Les six quantités définies par (6) constituent la déformation généralisée de la poutre en la section $S(X_1)$.

Afin d'interpréter mécaniquement cette définition nous allons étudier successivement les cas où une seule de ces quantités est non nulle.

Cas1: $a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$

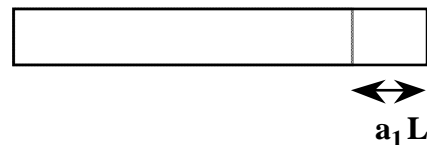
On en déduit

$$u_2^f = 0, u_3^f = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = \vec{0}$$

soit

$$u_1(X) = a_1 X_1 \quad \text{et} \quad u_3(X) = u_2(X) = 0$$

La poutre est dans un état d'allongement pur



On en déduit alors la signification des déformées généralisées:

- a_1 est l'allongement unitaire de la fibre moyenne
- a_2 et a_3 sont des glissements dans les plans (\vec{e}_1, \vec{e}_2) et (\vec{e}_1, \vec{e}_3)
- χ_1 est l'angle de torsion autour de l'axe \vec{e}_1 par unité de longueur
- χ_2, χ_3 sont les courbures de la fibre moyenne dans les plans (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , (\vec{e}_1, \vec{e}_3)

III - 2 Puissance Virtuelle des efforts intérieurs

En tenant compte de la cinématique particulière des poutres, nous allons expliciter l'équation

$$\Pi_{int}(\overline{\delta\epsilon}, \overline{\sigma}) = - \iint_{\Omega} \overline{\sigma} : \overline{\delta\epsilon} dX \tag{8}$$

où $\overline{\delta\epsilon}$ désigne une vitesse virtuelle de déformation, et $\overline{\sigma}$ l'état de contrainte dans la poutre. Nous choisirons, bien sûr, $\overline{\delta\epsilon}$ de la forme

$$\overline{\delta\epsilon} = \begin{bmatrix} \delta a_1 + \delta\chi_2 X_3 - \delta\chi_3 X_2 & \text{Sym} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(\delta a_2 - \delta\chi_1 X_3) & \delta v_{2,2} & \text{Sym} \\ \frac{1}{2}(\delta a_3 + \delta\chi_1 X_2) & \frac{1}{2}(\delta v_{2,3} + \delta v_{3,2}) & \delta v_{3,3} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Pour que les contraintes satisfassent l'hypothèse de Bernoulli, il est nécessaire que

$$\overline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

En portant (9) et (10) dans (8), on trouve finalement

$$\begin{aligned} - \Pi_{int}(\overline{\delta\epsilon}, \overline{\sigma}) &= \int_0^L [\delta a_1 \iint_S \sigma_{11} dX + \delta a_2 \iint_S \sigma_{12} dX + \delta a_3 \iint_S \sigma_{13} dX] dX_1 \\ &+ \int_0^L [\delta\chi_1 \iint_S (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) dX] dX_1 \\ &+ \int_0^L [\delta\chi_2 \iint_S X_3 \sigma_{11} dX - \delta\chi_3 \iint_S X_2 \sigma_{11} dX] dX_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Posons alors

$$\begin{aligned} T_1(X_1) &= \iint_S \sigma_{11} dX & M_1(X_1) &= \iint_S (X_2 \sigma_{31} - X_3 \sigma_{21}) dX \\ T_2(X_1) &= \iint_S \sigma_{12} dX & M_2(X_1) &= \iint_S X_3 \sigma_{11} dX \\ T_3(X_1) &= \iint_S \sigma_{13} dX & M_3(X_1) &= - \iint_S X_2 \sigma_{11} dX \end{aligned} \tag{12}$$

avec ces notation, on obtient plus simplement

$$- \Pi_{int}(\overline{\delta\epsilon}, \overline{\sigma}) = \int_0^L \left[\sum_{i=1}^3 (\delta a_i T_i(X_1) + \delta\chi_i M_i(X_1)) \right] dX_1$$

ou encore

$$\vec{T} = \iint_S \overline{\sigma} \vec{e}_1 dX \quad \text{et} \quad \vec{M} = \iint_S X_1 \vec{X} \wedge \overline{\sigma} \vec{e}_1 dX \tag{13}$$

ETUDE DE SOLLICITATIONS SIMPLES

I - Traction ou compression

I - 1 Définition

On dit qu'une poutre est dans un état de traction (ou compression) quand le torseur des actions extérieures est de la forme:

$$\mathbf{T}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_3 = \mathbf{0}$$

$$\vec{f}^f = f^f \vec{e}_1, \vec{c}^f = \vec{0}, \vec{F}^i = F^i \vec{e}_1, \vec{C}^i = \vec{0}$$

Attention: lorsque la longueur est supérieure à environs 8 fois la plus grande dimension transversale, une poutre sollicitée en compression est calculée au "flambement".

I - 2 Déformations et contraintes

De (II-17) et (II-18) on déduit:

$$T_1 = a_1 E S, \quad a_2 = a_3 = 0 \quad \text{et} \quad \chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0 \quad (1)$$

Le tenseur des contraintes qui sur une face d'équilibre est de la forme:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

où σ_n est une valeur constante dans toute la section. On obtient alors pour le tenseur des déformations:

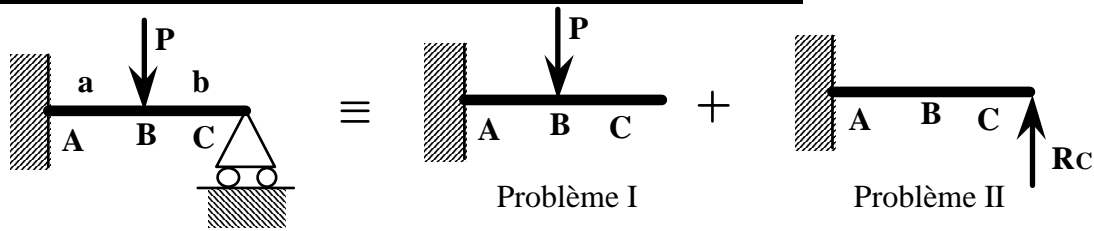
$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_n}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_n}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_n}{E} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Relation de la contrainte avec l'effort normal

On sait que

$$T_1(X_1) = \iint_S \sigma_{11} dX$$

Exemple: Résolution en utilisant la méthode de superposition



Problème I:

L'équilibre nous donne $R_{AI}=P$ et $M_{AI}=Pa$

$$q_I(X) = -M_{AI}\langle X \rangle^{-2} + R_{AI}\langle X \rangle^{-1} - P\langle X - a \rangle^{-1}$$

$$q_I(X) = P(-a\langle X \rangle^{-2} + \langle X \rangle^{-1} - \langle X - a \rangle^{-1})$$

$$T_{2I}(X) = P(a\langle X \rangle^{-1} - \langle X \rangle^0 + \langle X - a \rangle^0)$$

$$M_{3I}(X) = P(-a\langle X \rangle^0 + \langle X \rangle^1 - \langle X - a \rangle^1)$$

$$EI_3 u_{2I,1}^f(X) = P(-a\langle X \rangle^1 + \langle X \rangle^2 / 2 - \langle X - a \rangle^2 / 2 + C_1)$$

$$EI_3 u_{2I}^f(X) = P(-a\langle X \rangle^2 / 2 + \langle X \rangle^3 / 6 - \langle X - a \rangle^3 / 6 + C_1 X + C_2)$$

Et en utilisant les conditions aux limites : $u_{2I}^f(0) = 0$ et $u_{2I,1}^f(0) = 0$

$$EI_3 u_{2I}^f(X) = P(-a\langle X \rangle^2 / 2 + \langle X \rangle^3 / 6 - \langle X - a \rangle^3 / 6)$$

Flèche en $L=a+b$

$$EI_3 u_{2I}^f(L) = P(-aL^2 / 2 + L^3 / 6 - b^3 / 6) = P(-3L^2 + 3L + a) / 6$$

Problème II:

Il suffit de multiplier P par $-R_C$ en a priori I

$$EI_3 u_{2II}^f(X) = -R_C(-L\langle X \rangle^2 / 2 + \langle X \rangle^3 / 6)$$

Flèche en $L=a+b$

$$EI_3 u_{2II}^f(L) = R_C L^3 / 3$$

Superposition des problèmes :

Comme il y a un appui simple en C, on doit écrire,

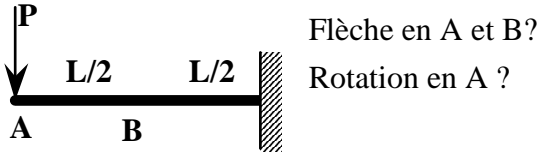
$$u_{2I}^f(L) + u_{2II}^f(L) = 0$$

Soit

$$2R_C L^3 + Pa^2(-3L + a) = 0 \quad \text{et} \quad R_C = \frac{Pa^2}{2L^3}(3L - a)$$

IV - 3 Exemples

IV - 3.1 Poutre console



a) La poutre est sollicitée en flexion. Le moment fléchissant est $M_3 = -Px$

D'après (12)

$$W = \int_0^L \frac{M_3^2}{2EI_3} dx = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI_3} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI_3}$$

Donc

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI_3} \quad (\text{vers le bas})$$

b) Pour déterminer le déplacement du point B, on applique en B une charge fictive Q.

Pour $0 \leq x \leq L/2$ $M_3 = -Px$ et pour $L/2 \leq x \leq L$ $M_3 = -Px - Q(x - L/2)$

d'où

$$W = \frac{L^3}{48EI_3} (8P^2 + Q^2 + 5PQ)$$

et finalement

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial Q} \Big|_{Q=0} = \frac{L^3}{48EI_3} (2Q + 5P) \Big|_{Q=0} = \frac{5PL^3}{48EI_3} \quad (\text{vers le bas})$$

c) Pour déterminer la rotation de la section A, on applique en A un couple fictif M_A .

Pour $0 \leq x \leq L$ $M_3 = -Px - M_A$

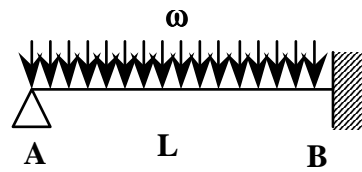
d'où

$$W = \int_0^L \frac{1}{2EI_3} (M_A + Px)^2 dx = \frac{1}{2EI_3} \left(\frac{P^2 L^3}{3} + PM_A L^2 + M_A^2 L \right)$$

et finalement

$$\theta_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} \Big|_{M_A=0} = \frac{PL^2}{2EI_3}$$

IV - 3.3 Application aux systèmes hyperstatiques



La réaction en A est une réaction surabondante.

$$q(x) = R_A \langle x \rangle^{-1} - \omega \langle x \rangle^0$$

d'où

$$M_3 = R_A x - \omega \frac{x^2}{2}$$

puis d'après (12)

$$W = \int_0^L \frac{M_3^2}{2EI_3} dx = \frac{1}{2EI_3} \left(R_A^2 \frac{L^3}{3} - \omega R_A \frac{L^4}{4} + \frac{\omega L^5}{20} \right)$$

Or comme le déplacement vertical du point A est nul

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = \frac{1}{2EI_3} \left(2R_A \frac{L^3}{3} - \omega \frac{L^4}{4} \right) = 0$$

d'où

$$R_A = \frac{3\omega L}{8}$$

V - Equation de Bertrand de Fonvirolle

V - 1 Enoncé

L'équation de Bertrand de Fonvirolle est une application directe du principe des puissances virtuelles. Nous avons vu (14), en considérant deux états d'équilibre d'un même système, que:

$$\iiint_{\Omega} \bar{\sigma}^I : \bar{\varepsilon}^{II} d\Omega = \iint_{\Omega} \bar{f}^I \cdot \bar{u}^{II} d\Omega + \iint_{\partial\Omega} \bar{F}^I \cdot \bar{u}^{II} d\partial\Omega$$

Si le système n'est soumis qu'à J forces ou couples ponctuels

$$\iiint_{\Omega} \bar{\sigma}^I : \bar{\varepsilon}^{II} d\Omega = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^I \cdot \bar{u}^{II}(x_1^i) + \sum_{i=1}^n \bar{C}_i^I \cdot \bar{\omega}^{II}(x_1^i)$$

d'où, en développant l'énergie interne, on obtient:

$$\int_0^L \left(\frac{T_1^I T_1^{II}}{ES} + \frac{T_2^I T_2^{II}}{GS} + \frac{T_3^I T_3^{II}}{GS} + \frac{M_1^I M_1^{II}}{GI_1} + \frac{M_2^I M_2^{II}}{EI_2} + \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_3} \right) dX_1 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^I \cdot \bar{u}^{II}(x_1^i) + \sum_{i=1}^n \bar{C}_i^I \cdot \bar{\omega}^{II}(x_1^i) \tag{16}$$

B et C étant fixes, on obtient:

$$\int_0^h \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_{AB}} dy + \int_0^L \frac{M_3^I M_3^{II}}{EI_{AC}} dx = 0$$

$$\int_0^h \frac{1}{EI_{AB}} [(R_{Bx}y)(F_1y)] dy + \int_0^L \frac{1}{EI_{AC}} \left[\left(R_{Bx}h - R_{By}x + \frac{\omega x^2}{2} \right) (F_1h - F_2x) \right] dx = 0$$

$$\frac{R_{Bx} F_1 h^2}{2 I_{AB}} + \frac{1}{I_{AC}} \left(F_1 R_{Bx} h^2 L - F_1 h R_{By} \frac{L^2}{2} + F_1 h \omega \frac{L^3}{6} - F_2 R_{Bx} h \frac{L^2}{2} + F_2 R_{By} \frac{L^3}{3} - F_2 \omega \frac{L^4}{8} \right) = 0$$

$$F_1 \left(\frac{I_{AC} R_{Bx} h^2}{2 I_{AB}} + R_{Bx} h^2 L - h R_{By} \frac{L^2}{2} + h \omega \frac{L^3}{6} \right) + F_2 \left(-R_{Bx} h \frac{L^2}{2} + R_{By} \frac{L^3}{3} - \omega \frac{L^4}{8} \right) = 0$$

Ceci doit être vrai en particulier pour $F_1=0$ ou $F_2=0$, d'où

$$\begin{cases} \frac{3 I_{AC} R_{Bx} h^2}{I_{AB}} + 6 R_{Bx} h^2 L - 3 h R_{By} L^2 + h \omega L^3 = 0 \\ -12 R_{Bx} h L^2 + 8 R_{By} L^3 - 3 \omega L^4 = 0 \end{cases}$$

Soit, en posant $k = \frac{I_{AC} h}{I_{AB} L}$

$$R_{Bx} = \frac{\omega L^2}{4h(4k+3)} \quad \text{et} \quad R_{By} = \frac{3\omega L(k+1)}{2(4k+3)}$$

V - 3 Application: Détermination des déplacements et rotations

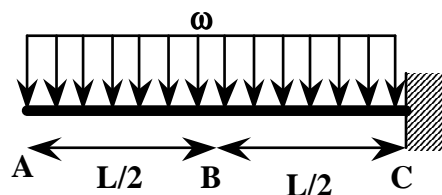
Si en un point d'abscisse curviligne X_1^P , on applique une force virtuelle unitaire pour le système I, on obtient:

$$\int_0^L (\dots) dX_1 = u''(X_1^P)$$

où $u''(X_1^P)$ est le déplacement du point dans le sens d'application de la force unitaire

Exemple:

On cherche, dans le cas d'une poutre console chargée uniformément, les déplacements et rotations aux point A et B.



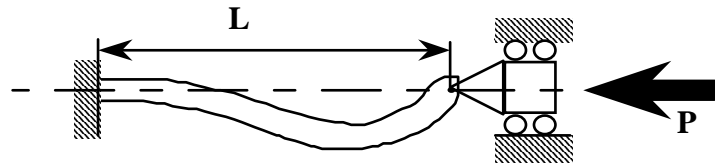
Pour le système courant, que nous appellerons le système II, on a:

$$M_3^{II} = -\omega \frac{x^2}{2}$$

* Flèche en A

Soit le système I suivant:

flambement que peut supporter cette poutre.



A l'encastrement, le déplacement latéral et la pente sont nuls. A l'extrémité, la poutre est libre de tout moment et ne peut se déplacer latéralement. Donc, si on élimine la solution triviale $u_2^f = 0$, l'équilibre se traduit par une déformée de type (7) avec pour conditions aux limites:

$$\begin{cases} u_2^f(0) = c_1 + c_4 = 0 \\ u_{2,1}^f(0) = c_2 + nc_3 = 0 \\ u_2^f(L) = c_1 + c_2L + c_3 \sin(nL) + c_4 \cos(nL) \\ M_3(L)/EI_3 = -n^2c_3 \sin(nL) - n^2c_4 \cos(nL) = 0 \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} c_1 = c_3 \operatorname{tg}(nL) \\ c_2 = -c_3 n \\ c_3 (\operatorname{tg}(nL) - nL) = 0 \\ c_4 = -c_3 \operatorname{tg}(nL) \end{cases}$$

si on élimine la solution triviale, on obtient un équilibre pour $nL = 1,43\pi$.

La charge critique est donc atteinte pour:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{(0,7L)^2} \tag{14}$$

et la déformée est telle que:

$$u_2^f(x) = c_4 \left(\cos\left(\frac{1,43\pi x}{L}\right) - 0,223 \sin\left(\frac{1,43\pi x}{L}\right) + \frac{x}{L} - 1 \right) \tag{15}$$

III - Généralisation: Formule d'Euler

Historiquement, on appelle "formule d'Euler" la charge critique d'une poutre Rotule-Rotule.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_3}{L^2}$$

Pour l'appliquer aux différentes combinaisons possibles d'appuis, on définit la charge critique comme étant:

ANNEXE

FORMULES ESSENTIELLES EN MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1. Coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\overline{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

* Soit $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$ un vecteur, alors

$$\text{grad}(\vec{v}) = \overline{\nabla v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{Tr}(\text{grad}(\vec{v})) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{v} = \text{div}(\text{grad}(\vec{v})) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \vec{e}_i = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z$$

* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\text{grad}(f) = \overline{\nabla f} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right\} \text{ et } \Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

* Soit $\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$ un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors:

$$\text{div}(\overline{\overline{T}}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{array} \right\} \text{ et } \Delta \overline{\overline{T}} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \Delta T_{xx} & \Delta T_{xy} & \Delta T_{xz} \\ \Delta T_{yx} & \Delta T_{yy} & \Delta T_{yz} \\ \Delta T_{zx} & \Delta T_{zy} & \Delta T_{zz} \end{bmatrix}$$