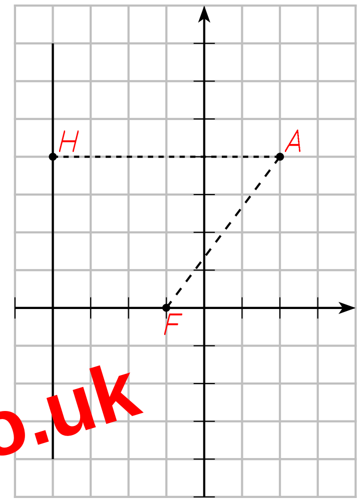
EXERCICE 2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère la conique Γ de directrice la droite Δ d'équation $x = -3$ et de foyer $F(-1, 0)$ et passant par le point $A(2, 4)$.

1. Montrer que Γ est une parabole.
2. Montrer qu'une équation cartésienne de Γ est $y^2 = 4x + 8$.
3. Soit $B(-4, 1)$.
   (a) Montrer que (AB) est tangente à Γ.
   (b) Montrer qu'il existe une une tangente T à Γ passant par B autre que (AB).
   (c) Construire T et Γ.

Solution 2. .



1. Soit H le projeté orthogonal de A sur la directrice, alors $AH = 5$.
   $e = \dfrac{AF}{AH} = 1$ car $AF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ donc Γ est une parabole.
2. Soit K le projeté orthogonal de F sur la directrice, alors $p = FK = 2$ (paramètre de Γ) et $S(-2, 0)$ le sommet de Γ (S est le milieu de $[FK]$.
   Γ est dirigée par $(S, \vec{\imath})$ alors une équation de Γ est :
   $y^2 = 4(x + 2) = 4x + 8$.

3 (a) Une équation de la tangente T à Γ en $M_0(x_0, y_0)$ est : $yy_0 = 2(x + x_0 + 4)$.

Soit T_A la tangente à Γ en A alors : $T_A : 4y = 2(x + 2 + 4)$ donc $T_A : y = \dfrac{1}{2}(x + 6)$.

D'autre part : $\dfrac{1}{2}(x_B + 6) = \dfrac{1}{2}(-4 + 6) = 1 = y_B$ donc $B \in T_A$ donc $T_A = (AB)$.

(b) Une équation de la tangente T à Γ en $M_0(x_0, y_0)$ est : $yy_0 = 2(x + x_0 + 4)$.
$B \in T$ signifie que $y_B y_0 = 2(x_B + x_0 + 4)$ signifie que $y_0 = 2x_0$ et comme $M_0 \in \Gamma$ alors $y_0^2 = 4(x_0 + 2)$ donc $x_0^2 = x_0 + 2$ alors $x_0^2 - x_0 - 2 = 0$ donc $x_0 = -1$ ou $x_0 = 2$
Pour $x_0 = -1$ alors $y_0 = -2$ et pour $x_0 = 2$ alors $y_0 = 4$
Donc il existe deux tangentes à Γ passant par B, l'une (AB) et l'autre $(A'B)$ où $A'(-1, -2)$.

(c) .