

Chapitre 3

Réponse temporelle des systèmes

On veut caractériser les systèmes d'une part par leur fonction de transfert et, d'autre part, par leur comportement. Ce dernier peut être mis en évidence par la réponse $s(t)$ à une entrée donnée. Classiquement, on peut apprendre beaucoup des systèmes en observant la réponse aux entrées suivantes :

- l'impulsion \rightarrow réponse impulsionnelle
- l'échelon \rightarrow réponse indicielle
- la rampe
- la sinusoïde \rightarrow réponse fréquentielle

Nous étudierons au chapitre suivant les réponses fréquentielles des systèmes. Dans ce chapitre, nous allons faire le lien entre fonction de transfert et réponse temporelle (c'est à dire les réponses aux impulsion, échelon et rampe). Comme dans la suite du cours, nous allons étudier les systèmes simples et très répandus que sont les systèmes du premier ordre et du second ordre. De plus, les méthodes d'étude de ces systèmes se généralisent facilement aux autres.

3.1 Les différentes entrées classiques

3.1.1 L'échelon

C'est l'entrée la plus utilisée de toutes. Elle correspond à un changement brusque de consigne. Cette fonction est définie par :

$$f(t) = a \quad \forall t > 0 \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$$

Sa transformée de Laplace est :

$$F(p) = \frac{a}{p}$$

- Pour $u = 1/2$, $|T(j\omega)|_{dB} = -1dB$, et $\varphi = -26,5^\circ$.
- Pour $u = 2$, $|T(j\omega)|_{dB} = -7dB$, et $\varphi = -63,5^\circ$.

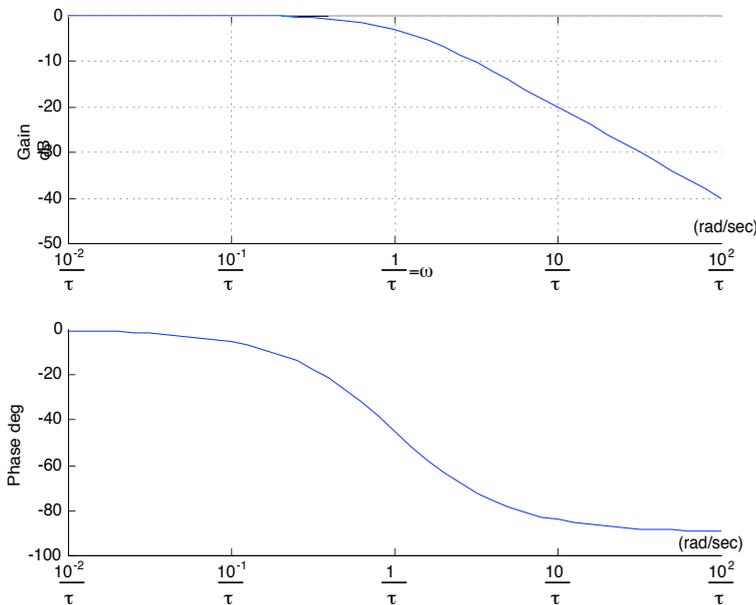


FIG. 4.1: Lieu de Bode d'un système du premier ordre

4.2.3 Intégrateur pur

On appelle intégrateur pur les systèmes dont la fonction de transfert est

$$T(p) = \frac{K}{p}$$

Pour ces systèmes, on a : $s(t) = K \cdot \int u(t) \cdot dt$. Le gain et la phase de ce système sont :

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\omega); \quad \varphi = -90^\circ$$

4.2.4 Système du deuxième ordre

Un système du deuxième ordre est défini par sa fonction de transfert $T(p)$:

$$T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \Rightarrow T(j\omega) = \frac{K}{1 + j \frac{2z\omega}{\omega_n} - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Pour pouvoir tracer ce lieu dans le cas général (nous n'avons pas de valeur numérique pour K et ω_n), on posera $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ et $K = 1$. Si $K \neq 1$, il suffira de décaler la courbe de gain de $20 \log(K)$.

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + 2jzu - u^2} \Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + (2zu)^2}}$$

5.1.4 Bouclage sur un système du premier ordre

Un système du premier ordre est caractérisé par sa fonction de transfert en BO :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

En boucle fermée, ce système sera équivalent à un système dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1+K}p} = \frac{K'}{1 + \tau'p}$$

avec $K' = \frac{K}{1+K}$ et $\tau' = \frac{\tau}{1+K}$. On en conclut qu'un premier ordre en BO reste un premier ordre en BF dont les caractéristiques (gain et constante de temps) sont divisées par $1 + K$. Il est donc plus rapide et son gain est toujours plus petit que 1. Si $K \gg 1$, le gain K' tend vers 1 et sa constante de temps est fortement diminuée.

5.1.5 Bouclage sur un système du second ordre

Un système du second ordre est caractérisé par sa fonction de transfert en BO :

$$T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

La fonction de transfert de ce système en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2z'}{\omega_n(1+K)}p + \frac{p^2}{\omega_n^2(1+K)}} = \frac{K'}{1 + \frac{2z'}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n'^2}}$$

avec $K' = \frac{K}{1+K}$ et $z' = \frac{z}{\sqrt{1+K}}$ et $\omega_n' = \omega_n\sqrt{1+K}$.

On en déduit que le gain est plus faible et inférieur à 1, que l'amortissement est plus faible et que la pulsation naturelle est plus grande qu'en BO. Il est important de noter que le système est toujours un deuxième ordre. La diminution de l'amortissement peut avoir comme conséquence que la réponse à l'échelon peut être oscillante en BF et pas en BO.

5.2 Interprétation Géométrique : Abaque de Black

Définition : *L'abaque de Black est un réseau de courbes qui permet de déterminer, dans le plan de Black, la courbe de réponse harmonique d'un système en boucle fermée à retour unitaire à partir de sa courbe de réponse harmonique en boucle ouverte*

5.3. STRUCTURES COMPLEXES : ALGÈBRE DES SCHÉMA-BLOCS39

- soit poser des variables intermédiaires puis poser les équations reliant toutes ces variables, puis enfin éliminer par calcul les variables intermédiaires
- soit simplifier pas à pas la représentation en utilisant les transformations décrites dans la feuille jointe à ce poly.

Exemple : Un système est décrit dans la figure 5.4 où les G_i et les R_i sont des fonctions de transfert. On cherche la fonction de transfert équivalente à l'ensemble.

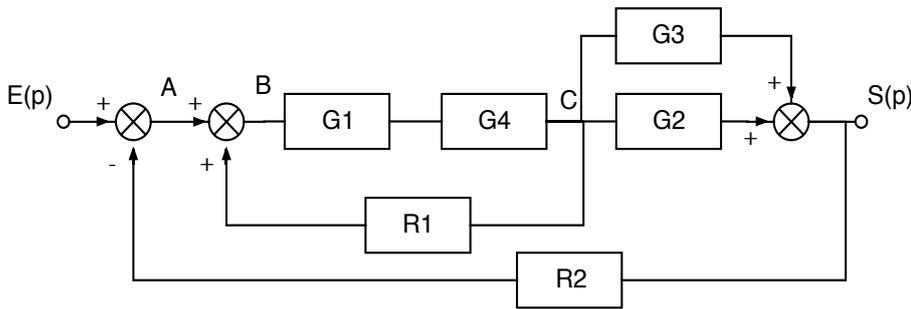


FIG. 5.4: Schéma-bloc d'un système complexe

- On utilise les variables intermédiaires A , B et C . Les équations reliant ces variables sont :

$$\begin{aligned}
 A &= E - R_2 S \quad S = C_2 + C_3, G_1 G_4 B \\
 B &= A + R_1 C \quad B(1 - R_1 G_1 G_4) = A \\
 C &= G_1 G_4 B \\
 S &= (G_2 + G_3)C
 \end{aligned}$$

$$S = \frac{(G_2 + G_3)G_1 G_4 A}{(1 - R_1 G_1 G_4)}$$

$$S = \frac{(G_2 + G_3)G_1 G_4 E}{1 - R_1 G_1 G_4 + (G_2 + G_3)G_1 G_4 R_2}$$

- On peut préférer la méthode par simplifications successives qui génère moins de calculs et donc moins d'erreurs, mais qui nécessite de disposer de la feuille en annexe. Pour le problème posé, on peut voir que le schéma en figure 5.5 est équivalent à la figure 5.4. On en déduit alors directement la fonction de transfert :

$$S = \frac{(G_2 + G_3)G_1 G_4 E}{1 - R_1 G_1 G_4 + (G_2 + G_3)G_1 G_4 R_2}$$

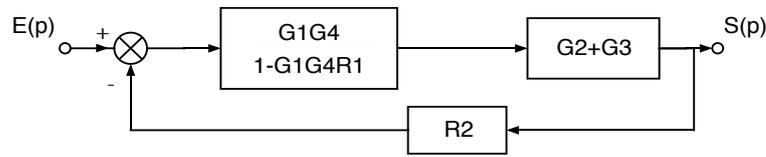


FIG. 5.5: Schéma-bloc après simplifications

5.3.2 Cas des entrées multiples

Certains systèmes sont décrits par un schéma-bloc comportant plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties. Donner les fonctions de transfert d'un tel système consiste à écrire chacune des sorties en fonction de toutes les entrées. Pour calculer ces fonctions de transfert, la méthode est d'utiliser le principe de superposition des systèmes linéaires : pour chaque signal d'entrée, on calcule chacune des sorties en ne considérant pas les autres entrées (on fait comme si elles étaient nulles). On somme ensuite pour chaque sortie les fonctions de transfert ainsi trouvées.

Exemple : Dans le système décrit en figure 5.6, on remarque deux entrées E et U et une sortie S .

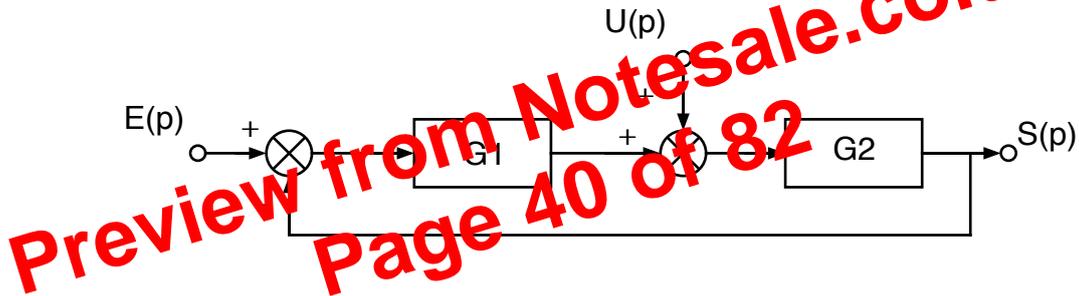


FIG. 5.6: Schéma-bloc d'un système à deux entrées

Calculons S en fonction de U (on pose $E = 0$) :

$$S_u(p) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot U(p)$$

Calculons S en fonction de E (on pose $U = 0$) :

$$S_e(p) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot E(p)$$

Ce qui donne :

$$S(p) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot U(p) + \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot E(p)$$

7.3.2 Réponse fréquentielle

On étudie le module et la phase de :

$$T(j\omega) = \frac{K.(1 + j\eta\omega)}{1 + j\tau\omega}$$

Ce qui donne pour le gain :

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20\log(K) + 10\log(1 + \omega^2\eta^2) - 10\log(1 + \omega^2\tau^2)$$

Et pour la phase :

$$\text{Arg}(T(j\omega)) = \text{arctg}(\eta\omega) - \text{arctg}(\tau\omega)$$

La figure 7.2 représente deux diagrammes de bode avec $K = 1$: dans le cas où $\eta < \tau$ à gauche et $\eta > \tau$ à droite.

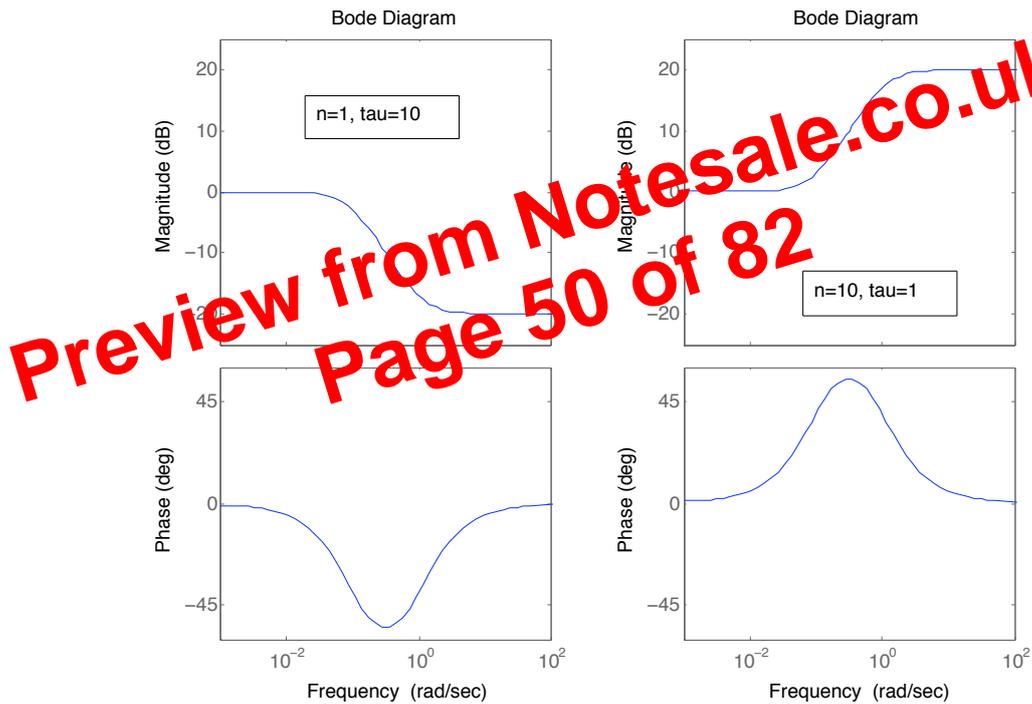


FIG. 7.2: Réponse à l'échelon d'un premier ordre à numérateur non constant

8.4.1 equation caractéristique

Dans le cas de l'étude de la stabilité en BF, l'équation caractéristique est :

$$1 + T(p) = 0 \quad \text{avec} \quad T(p) = \frac{\text{num}(p)}{\text{den}(p)}$$

$$\Rightarrow \text{num}(p) + \text{den}(p) = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0 = 0$$

8.4.2 tableau de Routh

On forme le tableau suivant

b_n	b_{n-2}	b_{n-4}
b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}
c_{n-2}	c_{n-4}	\dots
d_{n-3}	\dots	\dots

avec

$$c_{n-2} = \frac{b_{n-1} \cdot b_{n-2} - b_n \cdot b_{n-3}}{b_{n-1}}, \quad c_{n-4} = \frac{b_{n-1} \cdot b_{n-4} - b_n \cdot b_{n-5}}{b_{n-1}},$$

$$d_{n-3} = \frac{c_{n-2} \cdot b_{n-3} - b_{n-1} \cdot c_{n-4}}{c_{n-2}}, \quad \dots$$

Ce tableau est à former jusqu'à ce que l'on ait n lignes.

8.4.3 critère de stabilité

Le critère de Routh est le suivant : *Si tous les termes de la première colonne sont strictement positifs, le système est stable. S'il y a c changements de signes dans la première colonne, l'équation caractéristique a c racines à parties réelles positives (et le système est instable)*

8.4.4 exercices

Pour les équations caractéristiques suivantes, retrouvez si le système est stable.

1. $1 + T(p) = p^4 + 2p^3 + 8p^2 + 4p + 3 = 0$ (stable)
2. $1 + T(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + p^2 + 2p + 3 = 0$ (instable)
3. $1 + T(p) = p^2 + (1 - 2K)p + K = 0$ (stable si $K < 0.5$)

8.5.2 Critère du revers dans le plan de Black

Un système linéaire bouclé est stable si en décrivant la courbe de Black de la fonction de transfert en BO dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique sur sa droite.

8.5.3 Critère du revers dans le plan de Nyquist

Un système asservi linéaire est stable si en décrivant le lieu de Nyquist en BO dans le sens des fréquences croissantes, on laisse le point critique à sa gauche.

8.5.4 Règle du revers dans le plan de Bode

Soit ω_0 la pulsation pour laquelle la courbe de gain coupe l'axe 0dB et ω_c la pulsation pour laquelle la courbe des phase passe par -180° . L'asservissement est stable si $\omega_0 < \omega_c$.

8.6 Degré de stabilité d'un système asservi

Pour que la stabilité d'un système asservi soit assurée en toutes circonstances (perturbations comprises), il faut que sa courbe de réponse harmonique en BO passe suffisamment loin du point critique.

On chiffre le degré de stabilité d'un système linéaire au moyen de la marge de gain et la marge de phase. La marge de gain est le nombre de dB dont le gain doit être augmenté pour atteindre le point critique. La marge de phase est le déphasage supplémentaire qui permet d'atteindre le point critique.

Les valeurs couramment admises pour assurer une stabilité suffisante sont :

marge de gain : 8 à 12 dB

marge de phase : de 30° à 45°

Ces marges de stabilité peuvent être lues directement dans les différents plans (Bode, Black). La figure 8.2 montre un lieu de Black d'un système qui sera en limite de stabilité en BF (à gauche) et ce même système avec un gain plus faible aura une marge de gain de 13.9 dB et une marge de phase de 78° (à droite).

Remarque : un système instable n'a pas de marge de stabilité. Il est instable.

Chapitre 9

Précision des systèmes asservis

9.1 Définition

Un système asservis (donc en boucle fermée) sera d'autant plus précis que sa sortie $s(t)$ est proche de la consigne (valeur désirée) $s_d(t)$. On peut quantifier l'*erreur* entre la consigne et la sortie :

$$\epsilon(t) = s_d(t) - s(t)$$

Cette erreur sera significative de la précision de l'asservissement :

- pendant le régime transitoire. On parlera de **précision dynamique** ou bien
- une fois le régime permanent atteint. On parlera de **précision statique**.

9.2 Précision dynamique

On se limite, dans ce cours au cas où l'entrée est un échelon et pour les systèmes stables. Pour évaluer cette précision dynamique, on va observer la rapidité avec laquelle la sortie arrive au régime permanent. Si c'est long, on parlera d'une mauvaise précision dynamique. Si c'est rapide avec beaucoup d'oscillations, on parlera encore d'une mauvaise précision dynamique. Si c'est rapide et pas ou peu d'oscillations, on parlera d'une bonne précision dynamique.

Pour quantifier cette précision dynamique, on cherchera à évaluer le temps de réponse à 5%. Ce temps de réponse est le temps à partir duquel la sortie reste autour la valeur finale à 5% près.

Cas des réponses sans dépassement : Pour ces cas, le temps de réponse est le temps pour lequel la sortie vaut 95% de la valeur finale.

Chapitre 10

Compensation des systèmes asservis

10.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que ajouter un gain dans la chaîne directe permettait d'améliorer la précision d'un asservissement (mais ce gain ne permet pas d'annuler l'erreur de position ou de vitesse si cette erreur n'est pas nulle). Il n'est pas possible d'augmenter ce gain de façon trop importante : il peut dégrader la stabilité du système (il diminue la marge de gain - voire rendre le système instable). D'où le dilemme classique en automatique :

- un gain faible donne un système stable mais peu précis
- un gain fort donne un système plus précis mais moins stable.

Le gain de la boucle ouverte a une action sur l'asservissement, on parle d'un correcteur proportionnel. Un correcteur est un système qui va élaborer la commande d'un système en fonction de l'erreur mesurée entre sortie et consigne (voir figure 10.1). Un correcteur proportionnel est un système qui donne une commande proportionnelle à l'erreur mesurée. Beaucoup de systèmes peuvent être commandés par ces types de correcteurs simples à mettre en oeuvre. Le réglage du gain va consister à obtenir un bon compromis stabilité précision. En général, on choisira le gain qui permettra d'avoir un facteur de résonance de 2,3dB ($Q=1,3$).

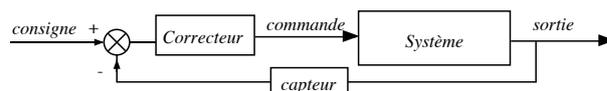


FIG. 10.1: Schéma d'un correcteur

Action proportionnelle : Un correcteur proportionnel va décaler la courbe de Black verticalement. Comme nous l'avons déjà vu, cette action a un effet favorable pour la précision et une effet néfaste à la stabilité.

Action intégrale : La commande est proportionnelle à l'intégrale de l'erreur. L'ajout d'intégrateur(s) dans la chaîne directe influence directement la précision (voir chapitre précédent). Cette action augmente le gain des basses fréquences.

Action dérivée : La commande est proportionnelle à la dérivée de l'erreur. Son effet est dit prédictif car cette action apporte une phase positive au système. Elle augmente donc la marge de phase, donc la stabilité

Les actions dérivées et intégrales ne s'emploient jamais seules mais en combinaison avec l'action proportionnelle.

Sur le site <http://auto.polytech.univ-tours.fr/>, dans la rubrique automatique continue, deux types de simulateurs permettent de régler à la souris les correcteurs décrits ici sur un système donné. Il s'agit de *corravance.sq*, *corretard.sq* et *PID.sq* qui s'ouvrent avec Sysquale (de la société Calerga) et de *LabSA* de Matthieu Lesaux, un exécutable fait avec LabView et qui permet de tester tous les correcteurs de ce chapitre sur le système de votre choix.

10.4 Correcteur avancé de phase

Leur fonction de transfert sont du type :

$$C(p) = K_r \cdot \frac{1 + a \cdot \tau p}{1 + \tau p} \quad \tau > 0; a > 1$$

a est le facteur d'avance de phase et τ la constante de temps du correcteur.

Les lieux de Bode de ce type de correcteur pour différentes valeurs de a et pour $\tau = 1$ et $K_r = 1$ sont donnés dans la figure 10.3. La phase positive maximale de ce correcteur est ϕ_M et se trouve à la pulsation ω_M , donnés par

$$\phi_M = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right); \quad \omega_M = \frac{1}{\tau \cdot \sqrt{a}}$$

Ce correcteur a l'avantage d'avoir une phase positive dans une gamme de fréquences. Bien placée, cette phase positive aura comme effet de stabiliser le système à asservir en augmentant sa marge de

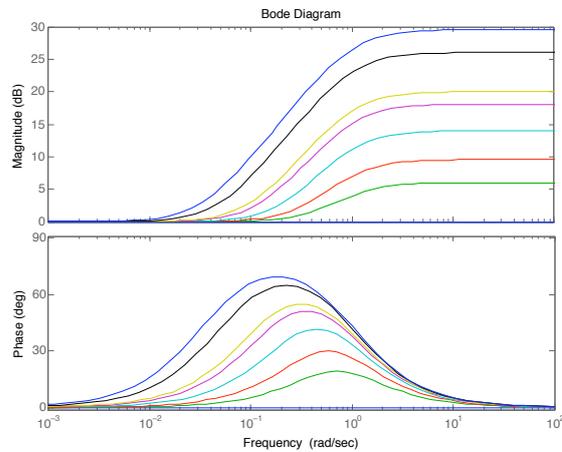


FIG. 10.3: Lieu de Bode d'un correcteur avance de phase pour $a = 1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30$

phase. L'inconvénient de ce correcteur est qu'il ajoute un gain pour les hautes fréquences. Le réglage de ce correcteur consiste à utiliser l'effet avance de phase proche du point critique et faire en sorte que le gain soit apporté aux fréquence qui n'auront pas d'effet néfaste sur la stabilité.

Méthode de réglage : Comme on peut le voir sur la figure 10.4, on choisira pour cela a en fonction de la marge souhaitée et τ de façon à ce que l'avance maximale de phase soit placée proche de la pulsation de résonance ω'_r en BF du système non corrigé. S'il est mal réglé, ce

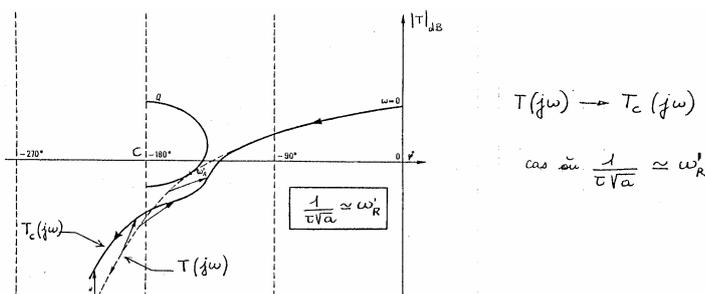


FIG. 10.4: Lieu de Black d'un système bien corrigé par un correcteur avance de phase

correcteur peut n'avoir aucun effet sur la stabilité du système (voir figure 10.5) voire la détériorer (voir figure 10.6).

10.7 Correcteur Proportionnel Intégrateur et Dérivé (PID)

C'est le correcteur le plus connu et aussi le plus complet car il associe les trois types de corrections qu'on a vu au début du chapitre. On le trouve sous plusieurs formes : Forme Mixte :

$$C(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} + \tau_d \cdot p \right)$$

Forme Série :

$$C(p) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) (1 + T_d \cdot p)$$

Forme Parallèle :

$$C(p) = K_p + \frac{I}{p} + D \cdot p$$

Dans cette section, on utilisera la forme mixte de ce correcteur.

10.7.1 Analyse du correcteur

La fonction de transfert d'un PID peut aussi s'écrire :

$$C(p) = K_r \frac{(1 + \tau'_1 p)(1 + \tau'_2 p)}{(1 + \tau'_1 p)(1 + \tau'_2 p)} \quad \tau_1 \cdot \tau_2 = \tau'_1 \cdot \tau'_2$$

Un PID se comporte comme un retard de phase en basse fréquence et une avance de phase en haute fréquence. Il permet d'associer les intérêts de ces deux correcteurs.

On choisira ses paramètres tels que

$$\frac{1}{\tau'_2} \ll \omega_R \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{\tau'_1 \cdot \tau'_2}} = \omega_R$$

où ω_R est la pulsation de résonance du système.

10.7.2 Réglage expérimental du correcteur

Une méthode de réglage expérimental permet de régler tour à tour les 3 paramètres K_p , T_i et T_d du correcteur.

- Pour régler le gain proportionnel K_p , on commence par annuler les actions intégrales et dérivées puis on choisit le gain de façon à obtenir en boucle fermée des oscillations mais pas trop importantes.