Solución:

Aplicaremos integración por partes, con $f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^{2x}$.

Así: $f'(x)=\cos x$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ e $I=\int e^{2x}\sin x dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx$.

Aplicando de nuevo integración por partes, tomando $g'(x)=e^{2x}, f(x)=\cos x$ tenemos $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}, f'(x)=-\sin x$ quedando:

$$I=\int e^{2x}\sin x dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x dx=$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos x+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x dx\right)=$$
$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x-\frac{1}{4}I$$

Luego: $I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x-\frac{1}{4}I \Rightarrow \frac{5}{4}I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x$

Despejando I, se tiene que $I=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)$

- **Integración de funciones racionales**

Una función racional tiene la forma: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde *P*(x) y Q(x) son polinomios. Sabemos que si grado de *P*(x) ≥ grado de Q(x), entonces podemos dividir *P*(x) entre Q(x) obteniendo: $P(x)=C(x)Q(x)+R(x)$, siendo *C*(x) el cociente y *R*(x) el resto, además *R*(x) = 0, o bien, grado *R*(x)<grado Q(x). Así:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left[C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}\right]dx=\int C(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

La primera integral es polinómica, luego inmediata. La segunda integral vale cero (si *R*(x) = 0), o grado *R*(x)<grado *Q*(x), en cuyo caso *Q*(x) se puede descomponer en factores irreducibles (según un teorema del álgebra), es decir, por medio de sus raíces.

Según otro teorema algebraico, la fracción $\frac{R(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer en suma de fracciones de coeficientes irreducibles. Veamos todo esto con un ejemplo.

Ejemplo: Calcular $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$

Solución:

Como el grado del numerador es igual al del denominador, procederemos —antes de integrar— a dividir x^4 entre x^4-1 siendo 1 el cociente obtenido y 1 el resto:

$$= \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c_{(2)} = \frac{tg^2 x}{2} + c_{(2)} \qquad (2)$$

Los resultados obtenidos en (1) y (2) no son formalmente iguales aunque equivalen realmente como veremos a continuación. Dividiendo la ecuación fundamental de la trigonometría por $\cos^2 x$ obtenemos:

$$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Substituyendo $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ en el resultado obtenido en (2) obtenemos el resultado en (1) menos $\frac{1}{2}$. Basta, pues, para comprender lo que sucede, redefinir la **constante arbitraria** de la integración en (1) como la en (2) más $\frac{1}{2}$, es decir, $c_{(1)} = c_{(2)} - \frac{1}{2}$.