Une conséquence : problèmes non-bornés et irréalisables

Si le primal est non-borné, alors le dual est irréalisable.

Exemple :

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.à} & x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Théorème des écarts complémentaires

Théorème

Soit $\bar{x}$ une solution réalisable pour le problème primal. La solution $\bar{x}$ est optimale si et seulement si il existe une solution réalisable $\bar{y}$ pour le problème dual telle que

- $(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j)\bar{y}_i = 0, i = 1, \dots, m$
- $(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j = 0, j = 1, \dots, n$

Corollaire

C'est évident que si une telle solution duale $\bar{y}$ existe, $\bar{y}$ est forcément une solution optimale.

Corollaire

Soit $\bar{x}$ une solution optimale pour le problème primal, et $\bar{y}$ une solution optimale pour le problème dual. Alors

- $(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j)\bar{y}_i = 0, i = 1, \dots, m$
- $(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij}\bar{y}_i)\bar{x}_j = 0, j = 1, \dots, n$