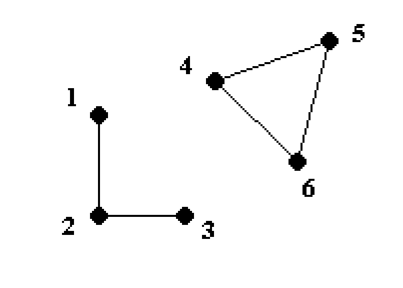
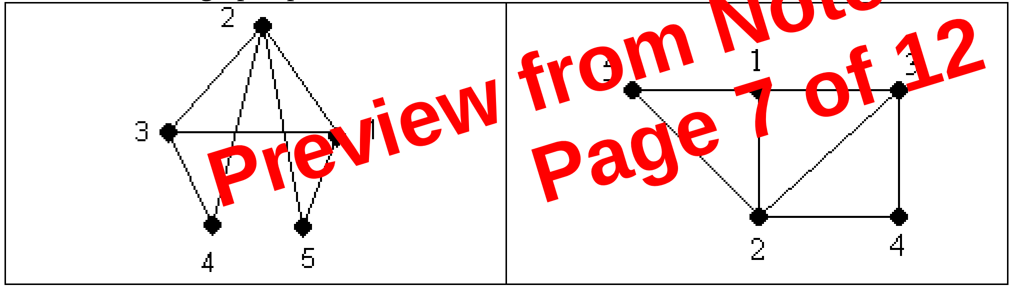


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice n°7</u>

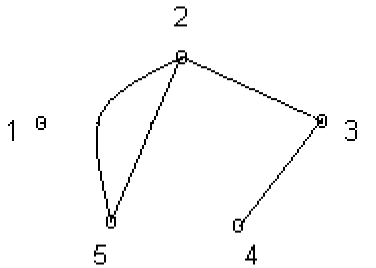
Le 1er et le 3ème graphe peuvent associés à la matrice, avec les numérotations :



Le deuxième ne possède pas de sommet de degré égal à 4 (« 2 »)

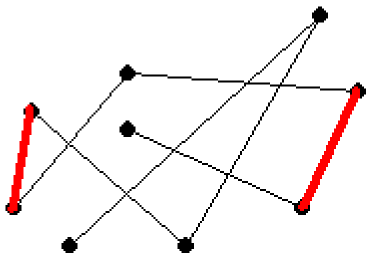
<u>Exercice n°8</u>

Un graphe possible est :



<u>Exercice n°9</u>

En rajoutant deux arêtes (en rouge), on peut rendre ce graphe connexe



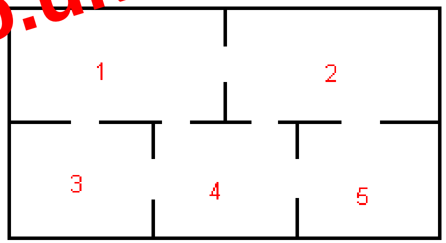
<u>Exercice n°10</u>

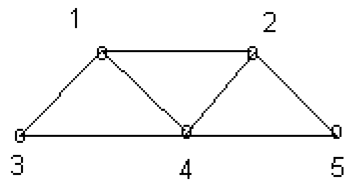
Tracer les figures « sans lever » le crayon revient à exhiber une chaine eulérienne. Or ceci n'est possible que si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 (on aura affaire à un cycle eulérien, donc le retour se fera sur le sommet de départ) ou à 2. Pour le premier graphe, c'est impossible, tous les sommets étant de degré impairs. Pour les trois autres graphes, c'est possible.

En ce qui concerne le 3ème graphe, tous les sommets étant de degré pair, on a même l'existence d'un cycle eulérien.

<u>Exercice n°11</u>

En numérotant les pièces et en matérialisant les portes par des arêtes, on traduit la situation par le graphe ci-dessous :

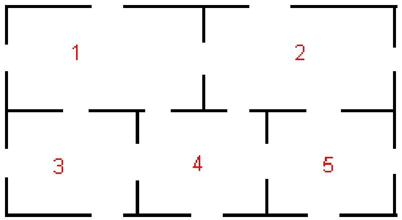


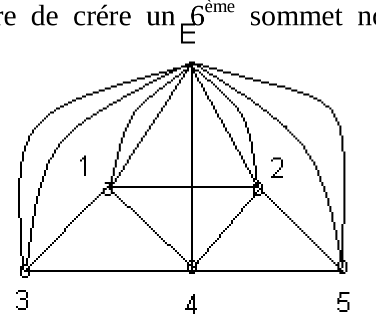


Se promener dans la maison en passant par chacune des ouvertures revient à chercher l'existence d'une chaîne eulérienne

Seuls deux sommets étant de degré impairs (1 et 2) , les autres étant de degré pair, il est possible de trouver une chaîne eulérienne associée à ce graphe.

Pour la deuxième situation, il est nécessaire de crére un 6ème sommet nommé « extérieur » (E)





Il existe maintenant quatre sommets de degré impairs (1,2,4 et E) , les autres étant de degré pair, il est impossible de trouver une chaîne eulérienne associée à ce graphe.

<u>Exercice n°12</u>

Trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une seule fois chaque route revient à trouver une chaîne eulérienne (voire un cycle) associée à ce graphe.

Tous les sommets étant de degré pair, le théorème d'Euler assurer l'existence d'un cycle eulérien (donc d'une chaîne eulérienne)

a) E-C-D-A-C-B-E est un exemple.

b) il n'existe pas de chaîne eulérienne partant de C et en terminant à D

c) A-D-C-E-B-C-A est un exemple.

jgcuaz@hotmail.com

On applique l'algorithme de coloration de Welch et Powell

Sommet	Degré	Couleur
1	4	Couleur 1
2	4	Couleur 2
3	4	Couleur 3
4	4	Couleur 4
6	3	Couleur 1
8	3	Couleur 4
5	2	Couleur 2
7	2	Couleur 2

On déduit de cette coloration que $\chi = 4$

<u>Exercice n°21</u>

1) a) Notons χ le nombre chromatique de ce graphe, c'est-à-dire le nombre minimal de couleurs à utiliser pour que deux bancs adjacents ne soient pas de la même couleur.

Puisque le sous-graphe BCD est complet, on aura $\chi \geq 3$ et puisque le degré maximum est égal à 3 (sommets B et D), on aura $\chi \leq 3+1$, c'est-à-dire, au final, $3 \leq \chi \leq 4$.

On procède à une coloration grâce à l'algorithme de Welch et Powell :

Sommet	Degré	Couleur
B	3	Couleur 1
D	3	Couleur 2
A	2	Couleur 2
C	2	Couleur 3
E	2	Couleur 1

Ainsi $\chi = 3$

b) Le nombre de sommets de degré impair étant exactement égal à deux, il existe une chaîne eulérienne, donc il est possible de se promener une seule fois dans toutes allées du parc

2) a) La matrice M associée au graphe G' est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) A partir de la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

on en déduit qu'il existe 5 chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B (terme à l'intersection de la 4ème ligne et de la 2ème colonne)

Ces chemins sont DEDEAB , DEAEAB, DEABCB, DCBDCB, DCDEAB

c) D'après la matrice, il existe un seul chemin de longueur 5 reliant A à A. Ce chemin est donc l'unique cycle contenant le sommet A, car tout cycle peut être considéré dans n'importe quel ordre. Ce cycle est ABCDEA.

En revanche, il existe 5 cycles de longueur 5 contenant le sommet B.

<u>Exercice n°22</u>

1) La matrice associée au graphe Γ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Le sous graphe AEFG est complet. Comme il est d'ordre 4, on déduit que $\chi(\Gamma) \geq 4$

3) Le sommet de plus haut degré de Γ est F, de degré 6. Ainsi $\chi(\Gamma) \leq 6+1$, et on déduit que $4 \leq \chi(\Gamma) \leq 7$

4) On procède à une coloration grâce à l'algorithme de Welch et Powell :

Sommet	Degré	Couleur
F	6	Couleur 1
E	5	Couleur 2
G	4	Couleur 3
A	4	Couleur 4
C	4	Couleur 4
B	3	Couleur 3
D	2	Couleur 2

5) L'organisateur doit prévoir 4 parties :

Partie 1 : F

Partie 2 : E,D

Partie 3 : G,B

Partie 4 : A,C

jgcuaz@hotmail.com