2. Q est positive $\Leftrightarrow q = 0$
3. Q est définie positive $\Leftrightarrow p = n$

Exercice 4

Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_2^2 + 16x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 16x_1x_3$$

4. Donner une décomposition « en carrés » de Q.
5. Déterminer une base $Q - orthogonale$.
6. En déduire le rang et la signature de Q. La forme Q est-elle dégénérée ?

Solution :

1.
$$\begin{aligned}
Q(x_1, x_2, x_3) = & \; x_1^2 + 6x_2^2 + 16x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 16x_2x_3 \\
= & \; (x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3) + 6x_2^2 + 16x_3^2 - 16x_2x_3 \\
= & \; [x_1^2 + 2x_1(3x_3 - 2x_2)] + 6x_2^2 + 16x_3^2 - 16x_2x_3 \\
= & \; \left[(x_1 + (3x_3 - 2x_2))^2 - (3x_3 - 2x_2)^2\right] + 6x_2^2 + 16x_3^2 - 16x_2x_3 \\
= & \; (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - 9x_3^2 + 12x_2x_3 - 4x_2^2 + 6x_2^2 + 16x_3^2 - 16x_2x_3 \\
= & \; (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_2x_3 = \\
= & \; (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + (2x_2^2 - 4x_2x_3) + 7x_3^2 \\
= & \; (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + \left[2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2\right] + 7x_3^2 \\
= & \; (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 + 5x_3^2
\end{aligned}$$

2. Pour déterminer une base $Q - orthogonale$, on pose

$$\begin{cases} X = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ Y = x_2 - x_3 \\ Z = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = X + 2Y - Z \\ x_2 = Y + Z \\ x_3 = Z \end{cases}$$

Alors une base $Q - orthogonale$ est définie par sa matrice de passage P de la base $B = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ à la base $B' = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$

$$P =: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. D'après la décomposition de Gauss :

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 + 5x_3^2$$