couple de points (P, Q) on a :

$\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$ **<u>Propriété fondamentale du champ de vecteur antisymétrique.</u>**

$\Rightarrow \pounds(\overrightarrow{PQ}) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ}$ c.à.d. $\forall \ \vec{V} \in E, \ \pounds(\vec{V}) = \vec{R} \wedge \vec{V}$

<u>Démonstration :</u>

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée directe, la représentation analytique de l'application linéaire antisymétrique $\pounds$ est une matrice carrée.

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

Raisonnons sur les composantes, pour les trois vecteurs de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a :

$$\pounds(\vec{i}) = L\,\vec{i} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \ell_{11}\,\vec{i} + \ell_{21}\,\vec{j} + \ell_{31}\,\vec{k}$$

De même

$$\pounds(\vec{j}) = L\,\vec{j} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \ell_{12}\,\vec{i} + \ell_{22}\,\vec{j} + \ell_{32}\,\vec{k}$$

Preview from Notesale.co.uk
Page 6 of 86

$$\pounds(\vec{k}) = L\,\vec{k} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \ell_{13}\,\vec{i} + \ell_{23}\,\vec{j} + \ell_{33}\,\vec{k}$$

Pour le couple de vecteurs $(\vec{i}, \vec{i})$ on a :

$\vec{i}.\pounds(\vec{i}) = -\vec{i}.\pounds(\vec{i})$ Car l'application Linéaire $\pounds$ est antisymétrique $\Rightarrow \ell_{11} = -\ell_{11} \Rightarrow \ell_{11} = 0$

De même pour les couples $(\vec{j}, \vec{j})$ et $(\vec{k}, \vec{k})$, on obtient $\ell_{22} = \ell_{33} = 0$.

Pour le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ on a : $\vec{i}.\ \pounds(\vec{j}) = -\vec{j}.\pounds(\vec{i}) \Rightarrow \ell_{12} = -\ell_{21}$

Pour le couple $(\vec{j}, \vec{k})$ on a : $\vec{j}.\ \pounds(\vec{k}) = -\vec{k}.\ \pounds(\vec{j}) \Rightarrow \ell_{23} = -\ell_{32}$

Pour le couple $(\vec{k}, \vec{i})$ on a : $\vec{k}.\ \pounds(\vec{i}) = -\vec{i}.\pounds(\vec{k}) \Rightarrow \ell_{31} = -\ell_{13}$

II – 7 Torseurs particuliers

a) <u>Glisseur</u>

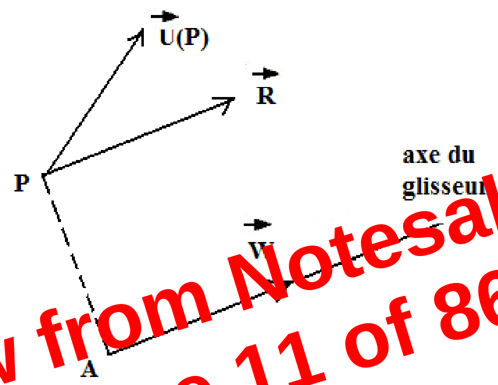
Par définition un torseur [T] de résultante non nulle est un glisseur, si et seulement si, son invariant scalaire est nul.

Cette définition se traduit par :

Le torseur $[T]_P = \left[\vec{R}\,,\vec{M}(P)\right]$ est un glisseur si $\vec{R} \neq \vec{0}$ et il existe au moins un point A tel que $\vec{M}(A) = \vec{0}$.

Dans ce cas, on a : $\forall$ P, $\vec{M}(P) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$

L'ensemble le plus simple associé à ce torseur est constitué d'un vecteur unique qui passe par Le point A et dont le support est parallèle à $\vec{R}$. C'est le cas d'un vecteur lié $(A, \vec{w}\,)$



Preview from Notesale.co.uk
Page 11 of 86

Le support (axe) d'un glisseur est le lieu des points P pour lesquels le moment est nul.

Axe du glisseur $\Delta = \left\{ P \in \xi / \vec{M}(P) = \vec{0} \right\}$

b) <u>Torseur-couple</u>

Un torseur [T] non nul est un torseur-couple si et seulement si, sa résultante est nulle.

$$[T] \text{ est un torseur couple } \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \exists \text{ un point P tel que } \vec{M}(P) \neq \vec{0} \end{cases}$$

D'une manière générale, Un torseur [T] qui vérifie l'une des propriétés suivantes est par définition appelé torseur-couple.

i) Sa résultante générale $\vec{R} = \vec{0}$

ii) Son moment $\vec{M}$ est uniforme

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_o} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R_o} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_o}$$

D'après la formule de Bour

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_O} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}\,(R_1/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{O_1P}$$

D'où

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_O} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R_O} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}\,(R_1/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{O_1P}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_O} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{V}(O_1/R_o) + \vec{\Omega}\,(R_1/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{O_1P}$$

D'où $\quad \vec{V}(P/R_o) = \vec{V}(P/R_1) + \vec{V}_{e/R_o}$: C'est **la loi de composition des vitesses**

Avec :

* $\vec{V}(P/R_o) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_o}$: **Vitesse absolue** du point P

* $\vec{V}(P/R_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R_1}$: **Vitesse relative** du point P

* $\vec{V}_{e/R_o} = \vec{V}(O_1/R_o) + \vec{\Omega}(R_1/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{O_1P}$: **Vitesse d'entraînement** de R_1 par rapport à R_o. La vitesse d'entraînement s'écrit aussi $\vec{V}_{e/R_o} = \vec{V}(P \in R_1/R_o)$ appelée aussi vitesse du **point coïncidant** c.à.d. la vitesse du point P, considéré fixe dans le référentiel R_1, par rapport au référentiel R_o.

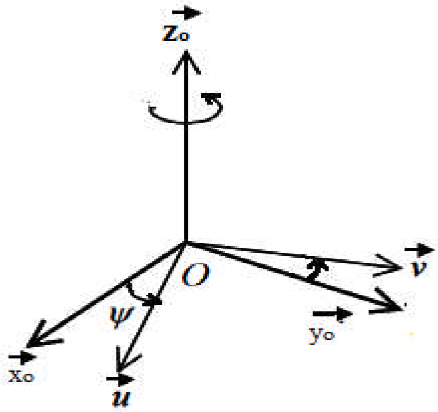
Preview from Notesale.co.uk
Page 21 of 86

I - 6 – 4 Compositions des accélérations

Une seconde dérivation du vecteur position $\overrightarrow{OP}$ par rapport au temps dans le référentiel R_o conduit à :

$$\vec{\gamma}(P/R_o) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}\right)_{R_o} = \left(\frac{d\vec{V}(P/R_o)}{dt}\right)_{R_o} = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{V}(P/R_1) + \vec{V}_{e/R_o}\right)\right]_{R_o}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R_o) = \left(\frac{d}{dt}\vec{V}(P/R_1)\right)_{R_o} + \left(\frac{d}{dt}\vec{V}_{e/R_o}\right)_{R_o}$$



Précession

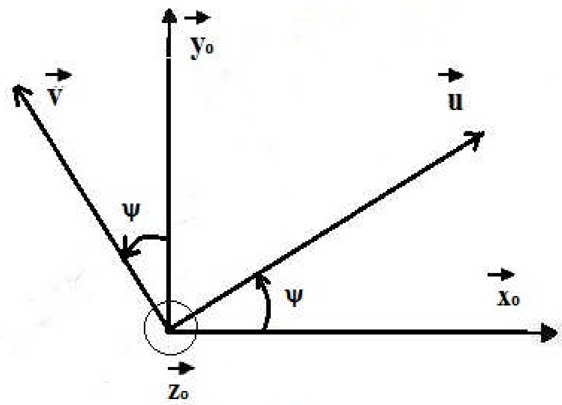


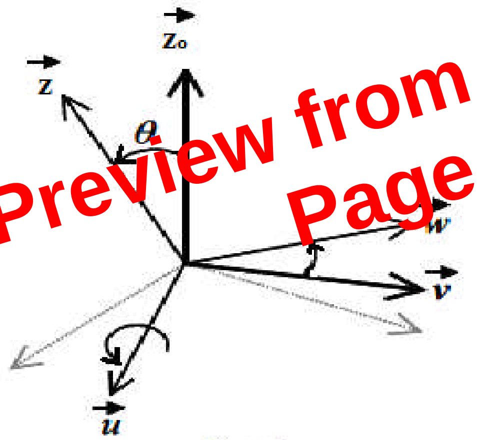
Figure plane partielle

Le vecteur rotation instantanée correspondant est $\boxed{\vec{\Omega}(R_1/R_o) = \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_o}$

- ***La nutation :***

Maintenant on fait subir à R_1 une rotation d'angle $\theta = (\vec{z}_o, \vec{z})$ autour de l'axe $(O, \vec{u})$. Cette rotation amène le repère $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_o)$ au repère $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$. **L'angle θ** est appelé **angle de nutation**.

Preview from Notesale.co.uk
Page 24 of 86



Nutation

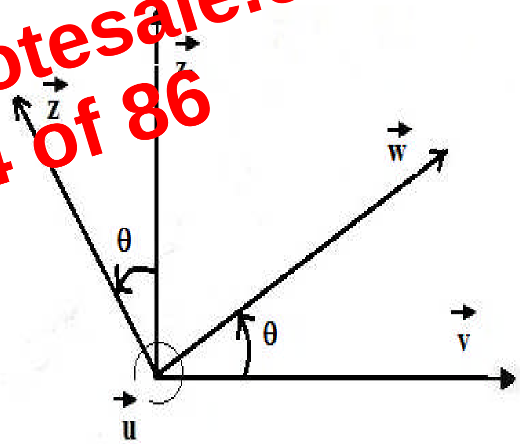


Figure plane partielle

Le vecteur rotation instantanée correspondant est $\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_o}$

- ***La rotation propre :***

Enfin, on fait tourner le repère $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ autour de l'axe $(O, \vec{z})$ pour l'amener en coïncidence avec le repère $R_S(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Cette rotation est d'angle $\phi = (\vec{u}, \vec{x})$. L'angle ϕ est appelé angle de rotation propre.

Chapitre III

Cinétique du solide

I – Répartition des masses.

I – 1 Masse d'un système matériel

I – 2 Centre d'inertie (centre de masse)

II – Matrice d'inertie

III – Moment d'inertie à partir de la matrice d'inertie

IV – Axes principaux d'inertie

V – Théorème d'Huygens

VI – Le torseur Cinétique

VI – 1 Définition

VI – 2 Détermination du moment cinétique d'un solide (S) en l'un de ses points.

VI – 3 Détermination du moment cinétique d'un solide (S) en un point $\notin$ solide (S).

VI – 4 Repère barycentrique R_G

VI – 5 Théorème de Koenig pour le moment cinétique.

VII – Le torseur dynamique

VII – 1 Définition

VII – 2 Relation entre moment dynamique et moment cinétique d'un solide.

VII – 3 Théorème de Koenig pour le moment dynamique

VIII – Energie cinétique

VIII – 1 définition

VIII – 2 Propriétés de l'énergie cinétique

Preview from Notesale.co.uk
Page 30 of 86

D'après la définition du centre de masse : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\, dm$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\vec{V}(G/R_o) = \frac{1}{M}\int_{P\in S} \vec{V}(P/R_o)\, dm \;\Rightarrow\; \vec{\gamma}(G/R_o) = \frac{1}{M}\int_{P\in S} \vec{\gamma}(P/R_o)\, dm$$

Ainsi $\int_{P\in S} \vec{\gamma}(P/R_o)\, dm = M\, \vec{\gamma}(G/R_o)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{S}(S/R_o) = M\, \vec{\gamma}(G/R_o)}$$

La résultante dynamique $\vec{S}(S/R_o)$ du solide S dans son mouvement par rapport au repère Ro est égale à la quantité d'accélération, par rapport à Ro, du centre d'inertie G de (S) affecté de la masse totale M du solide.

Remarque :

$$\vec{S}(S/R_o) = M\,\vec{\gamma}(G/R_o) = M\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(G/R_o)\right]_{R_o} = \left[\frac{d}{dt} M\, \vec{V}(G/R_o)\right]_{R_o}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{S}(S/R_o) = \left[\frac{d}{dt}\vec{P}(S/R_o)\right]_{R_o}}$$

Preview from Notesale.co.uk
Page 49 of 86

C.à.d. la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique $\vec{P}(S/R_o)$ (quantité de mouvement) relativement au repère Ro, est égale à la résultante dynamique $\vec{S}(S/R_o)$.

b) __Le moment dynamique__

Le moment dynamique en un point quelconque A du solide (S) par rapport au repère Ro, la quantité :

$$\boxed{\vec{D}_A(S/R_o) = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P\in S/R_o)\, dm}$$

Etant donné deux points quelconques A et B on a :

$$\vec{D}_A(S/R_o) = \vec{D}_B(S/R_o) + \vec{S}(S/R_o) \wedge \overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{D}_A(S/R_o) = \vec{D}_B(S/R_o) + M\,\vec{\gamma}(G/R_o) \wedge \overrightarrow{BA}$$

2ème Cas : Si le point A est fixe par rapport à Ro alors $\vec{V}(A \in S / R_o) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\left[\frac{d}{dt}\vec{L}_A(S/R_o)\right]_{R_o} = \vec{D}_A(S/R_o)}$$

Résumé :

Si le point A est fixe ou confondu avec le centre d'inertie G alors :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{L}_A(S/R_o)\right]_{R_o} = \vec{D}_A(S/R_o)$$

Dans ce cas les éléments de réduction du torseur dynamique $[T_D(S/R_o)]$ sont **les dérivés par rapport au temps** des éléments de réduction du torseur cinétique $[T_C(S/R_o)]$:

$$\vec{S}(S/R_o) = \left[\frac{d}{dt}\vec{P}(S/R_o)\right]_{R_o} \quad \text{et} \quad \vec{D}_A(S/R_o) = \left[\frac{d}{dt}\vec{L}_A(S/R_o)\right]_{R_o}$$

C.à.d. au point A $\boxed{[T_D(A, S/R_o)] = \frac{d}{dt}[T_C(A, S/R_o)]}$

VII – 3 Théorème de Koenig pour le moment dynamique

Preview from Notesale.co.uk
Page 51 of 86

Soit R_G le repère barycentrique associé à un repère Ro et à un solide (S) de masse M.

On a le moment dynamique :

$$\vec{D}_A(S/R_o) = \int_{P\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P \in S/R_o)\, dm$$

$$\text{et } \vec{\gamma}(P/R_o) = \vec{\gamma}(P/R_G) + 2\vec{\Omega}(R_G/R_o) \wedge \vec{V}(P/R_G) + \vec{\gamma}(G/R_o)$$
$$+ \left(\frac{d}{dt}\vec{\Omega}(R_G/R_o)\right)_{R_o} \wedge \overrightarrow{GP} + \vec{\Omega}(R_G/R_o) \wedge \left[\vec{\Omega}(R_G/R_o) \wedge \overrightarrow{GP}\right]$$

Le repère $\mathbf{R_G}$ **est en mouvement de translation** par rapport à Ro $\Rightarrow \vec{\Omega}(R_G/R_o) = \vec{0}$

d'où $\vec{\gamma}(P/R_o) = \vec{\gamma}(P/R_G) + \vec{\gamma}(G/R_o)$

D'après la **relation fondamentale du champ de vecteurs vitesse** d'un solide.

$\vec{V}\,(P/R_o) = \vec{V}\,(A/R_o) + \vec{\Omega}\,(S/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{AP}$ où A est un point du solide.

$$\Rightarrow 2\,E_C\,(S/R_o) = \int_{P\in S} \left[\vec{V}\,(A/R_o) + \vec{\Omega}\,(S/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{AP}\right].\ \vec{V}(P/R_o)\,dm$$

$$\Rightarrow 2\,E_C\,(S/R_o) = \int_{P\in S} \vec{V}(A/R_o)\ .\ \vec{V}(P/R_o)\,dm + \int_{P\in S} \left[\vec{\Omega}\,(S/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{AP}\right].\ \vec{V}(P/R_o)\,dm$$

$$Le\ produit\ mixte\ \ \vec{V}(P/R_o).\left[\vec{\Omega}\,(S/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{AP}\right] = \vec{\Omega}\,(S/R_o).\left[\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R_o)\right]$$

$$\Rightarrow 2\,E_C\,(S/R_o) = \vec{V}(A/R_o)\int_{P\in S}\vec{V}(P/R_o)\,dm + \int_{P\in S}\vec{\Omega}\,(S/R_o).\left[\overrightarrow{AP}\,\Lambda\,\vec{V}(P/R_o)\right]dm$$

$$\Rightarrow 2\,E_C\,(S/R_o) = \vec{V}(A/R_o)\int_{P\in S}\vec{V}(P/R_o)\,dm + \vec{\Omega}\,(S/R_o).\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\,\Lambda\,\vec{V}(P/R_o)\,\mathrm{dm}$$

Or $\int_{P\in S}\vec{V}(P/R_o)\,dm = M\,\vec{V}(G/R_o)$ d'après la définition de centre de masse G

Et $\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\,\Lambda\,\vec{V}(P/R_o)\,dm = \vec{L}_A\,(S/R_o)$ d'après la définition du moment cinétique

D'où $\quad 2\,E_C\,(S/R_o) = \vec{\Omega}\,(S/R_o).\vec{L}_A\,(S/R_o) + M\ \vec{V}(G/R_o).\ \vec{V}(A/R_o)$

♦ ***<u>Cas particuliers importants</u>***

Deux cas particuliers **importants** peuvent être déduits de la dernière relation :

<u>1er Cas :</u> Si le point A du solide est fixe par rapport à Ro alors $\vec{V}(A/R_o) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad 2\,E_C\,(S/R_o) = \vec{\Omega}\,(S/R_o)\ .\ \vec{L}_A\,(S/R_o)$$

$$\Rightarrow \quad 2\,E_C\,(S/R_o) = \vec{\Omega}\,(S/R_o)\ .\ II_A\,(S)\,\vec{\Omega}\,(S/R_o)$$

<u>2ème Cas :</u> Si le point A est confondu avec le centre d'inertie G du solide (**A ≅ G**) L'expression de l'énergie cinétique devient :

$$2\,E_C\,(S/R_o) = \vec{\Omega}\,(S/R_o).\,\vec{L}_G\,(S/R_o) + M\,V^2(G/R_o)$$

$$2\,E_C\,(S/R_o) = \vec{\Omega}\,(S/R_o)\,.\ II_G(S)\,\vec{\Omega}\,(S/R_o) + M\,V^2(G/R_o)$$

C'est le **théorème de Koenig pour l'énergie cinétique.**

Preview from Notesale.co.uk
Page 53 of 86

La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie les relations entre les mouvements des solides (cinématique) et les causes (efforts) qui les créent, c'est-à-dire les actions mécaniques qui agissent sur eux.

La loi fondamentale exprime la relation entre les éléments cinétiques et dynamiques d'un système matériel (Σ) et les forces s'exerçant sur lui. La loi fondamentale de la dynamique est une généralisation sous la forme torsorielle de la loi fondamentale de la dynamique du point matériel.

I - Les efforts extérieurs

Ils sont définis par un champ de vecteurs auquel on associe un torseur $\left[T_{\text{Fext}}\right] = \left[\vec{F}_{ext}\ ,\ \vec{M}\left(\vec{F}_{ext}\right)\right]$ appelé **torseur des forces extérieures** (ou torseur force extérieure) exercées sur le système (Σ). $\vec{F}_{ext}$ est la résultante générale (résultante des forces extérieures) et $\vec{M}\left(\vec{F}_{ext}\right)$ le moment de ce torseur (moment des forces extérieures).

Remarque :

On fera une distinction dans les efforts extérieurs entre les forces à distance (forces dérivant d'une fonction énergie) qui sont toujours des données du problème et les forces de contact (ou de liaison) qui sont des inconnues du problème posé.

Preview from Notesale.co.uk
Page 57 of 86

a) Torseur force :

Soit un système matériel constitué de n points matériels P_i.

P_i (i=1, 2, …….,n) indique un point où s'exerce la force $\vec{F}_i$.

A cet ensemble de force $\vec{F}_i$ s'exerçant sur les points P_i , on associe le torseur force $\left[T_{Fext}\right]$ défini par :

- Sa résultante générale : $\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$
- Son moment en un point A : $\vec{M}_A(\vec{F}_{ext}) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_i$.

On vérifie que $\vec{M}_A(\vec{F}_{ext}) = \vec{M}_B(\vec{F}_{ext}) + \vec{F}_{ext} \wedge \overrightarrow{BA}$ relation fondamentale des torseurs.

Si la résultante générale est nulle $(\vec{F}_{ext} = \vec{0})$ le torseur force $\left[T_{Fext}\right]$ est un couple.

Si $\vec{C}_i$ (Couple concentré) est le couple exercé sur P_i alors $\vec{C} = \sum_{i=1}^{n} \vec{C}_i$.

Et $\vec{D}_A(S/R_o) = \vec{M}_A(\vec{F}_{ext})$.

<u>Autre démonstration</u>

O est l'origine du repère R_o, on a : $\vec{L}_A\,(S/R_o) \;=\; \vec{L}_o\,(S/R_o) + M\,\vec{V}\,(G/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{OA}$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt}\vec{L}_A\,(S/R_o)\right]_{R_o} = \left[\frac{d}{dt}\vec{L}_O\,(S/R_o)\right]_{R_o} + M\,\vec{\gamma}\,(G/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{OA} + M\,\vec{V}(G/R_o)\,\Lambda\,\vec{V}(A/R_o)$$

$$= \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) + \vec{S}\,(S/R_o)\;\Lambda\,\overrightarrow{OA} + M\,\vec{V}(G/R_o)\,\Lambda\,\vec{V}(A/R_o)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt}\vec{L}_A\,(S/R_o)\right]_{R_o} = \vec{M}_A(\vec{F}_{ext}) + M\,\vec{V}(G/R_o)\;\Lambda\,\vec{V}(A/R_o)$$

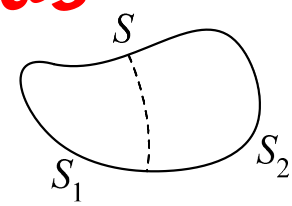
car $\vec{M}_o(\vec{F}_{ext}) + \vec{S}\,(S/R_o)\,\Lambda\,\overrightarrow{OA} = \vec{M}_A(\vec{F}_{ext})$

4) Si le solide (S) est en mouvement par rapport à autre solide (S_o). Et si le solide (S) est en contact ponctuel avec le solide (S_o) en I (point géométrique). Il convient d'appliquer le théorème du moment cinétique en I qui est mobile afin d'éliminer les réactions de contact.

Preview from Notesale.co.uk
Page 61 of 86

IV – Théorème de l'action et de la réaction

Il s'agit d'une conséquence importante de la loi fondamentale de la dynamique.



Etant donné un système $S = S_1 + S_2$ formé de deux éléments matériels S_1 et S_2, en contact mais sans partie commune, en mouvement dans le repère galiléen R_o.

<u>Enoncé :</u>

Pour deux solides S_1 et S_2 en contact mais sans partie commune, le torseur des forces extérieures exercées par S_1 sur S_2 est l'opposé du torseur de forces extérieures exercées par S_2 sur S_1 :

$$\boxed{\left[T_F(S_1 \rightarrow S_2)\right] = -\left[T_F(S_2 \rightarrow S_1)\right]}$$

d) *Cas de forces dérivant d’une énergie potentielle*

Considérons un système de forces donné, s’exerçant sur un solide (S), ne dépend que des paramètres de position mais pas du temps. Si ce système de force dérive d’une énergie potentielle Ep(S) [ou d’une fonction de force U(s)], alors sa puissance est donnée par :

$$\boxed{P = = -\frac{d}{dt} Ep\,(S) = \frac{d}{dt} U\,(S)}$$

e) *Cas d’une liaison parfaite*

Une **liaison est** dite **parfaite** si la **puissance de toutes les actions** réalisant cette liaison **est nulle** pour tout mouvement respectant cette liaison. Les liaisons réalisées par contact sans frottement ou sans glissement sont parfaites.

VI - 3 Travail développé par un ensemble de forces.

Par définition, le travail développé par un ensemble de forces, $\vec{F}$, entre deux instants t_1 et t_2, par rapport à un repère R_o, est donné par :

Preview from Notesale.co.uk
Page 67 of 86

$$\boxed{W\,(\vec{F})_{R0} = \int_{t_1}^{t_2} dW\,(S/R_o) = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt}$$

VII - Théorème de l’énergie cinétique

VII - 1 Théorème de l’énergie cinétique pour un solide (S)

Enoncé

La dérivée par rapport au temps de l’énergie cinétique du solide (S) relativement à un repère galiléen R_o, est égale à **la puissance des efforts extérieurs subis** par le solide relativement à ce même repère.

$$\boxed{\frac{d}{dt} E_C\,(S/R_o) = P_{ext}\,(S/R_o)}$$

Démonstration

La puissance des efforts extérieurs exercés sur le solide (S) par rapport au repère R_o, est :

$$P_{ext}(S/R_o) = \left[\, T_V(A, S/R_o) \,\right] . \left[\, T_{Fext}(A, S/R_o) \,\right].$$

Série n°1 : Champ de vecteurs - Torseurs

Question de cours

Montrer que tout champ de vecteurs antisymétrique est équiprojectif et réciproquement.

Exercice.1

Résoudre l'équation vectorielle $\vec{U} \wedge \vec{X} = \vec{V}$ où $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs non nuls.

Exercice.2

E est l'espace vectoriel réel à 3 dimensions associé à l'espace affine ξ repéré par le repère $R\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A tout point P(x, y, z) de l'espace affine, on associe la famille de champs de vecteurs $\overrightarrow{M_t}(P)$ définis par :

$$\overrightarrow{M_t}(P) = \left| \begin{array}{l} 3y - tz + 1 \\ -3x + 2tz \\ tx - t^2 y + 2 \end{array} \right. \qquad \text{Où t est un réel}$$

1) Pour quelles valeurs de t, $\vec{M}_t$ est-il le moment d'un torseur ?
2) Lorsque $\vec{M}_t$ est le moment d'un torseur, calculer sa résultante et préciser si ce torseur est un glisseur, un couple. Déterminer son axe central.

Exercice.3*

Démontrer que deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ sont égaux si, et seulement si, il existe trois points non alignés P_1, P_2 et P_3 en lesquels leurs moments sont égaux.

Preview from Notesale.co.uk
Page 75 of 86

Exercice.4

Le repère $R\,(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé et orienté dans le sens habituel. a, b, et c sont des paramètres réels. On donne les trois vecteurs liés suivants :

$\vec{R}_1 = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$	D'origine A (1, 0, 0)
$\vec{R}_2 = \vec{j}$	D'origine B (1, 1, 0)
$\vec{R}_3 = c\,\vec{i}$	D'origine C (0, 0, 1)

Et on leur associe respectivement les glisseurs $[G_1]$, $[G_2]$ et $[G_3]$.

1) Montrer que $[G_1] + [G_2]$ est un glisseur, préciser son axe.
2) On note $T = [\,\vec{R}, \vec{U}(P)\,]$ Le torseur $[T] = [G_1] + [G_2] + [G_3]$

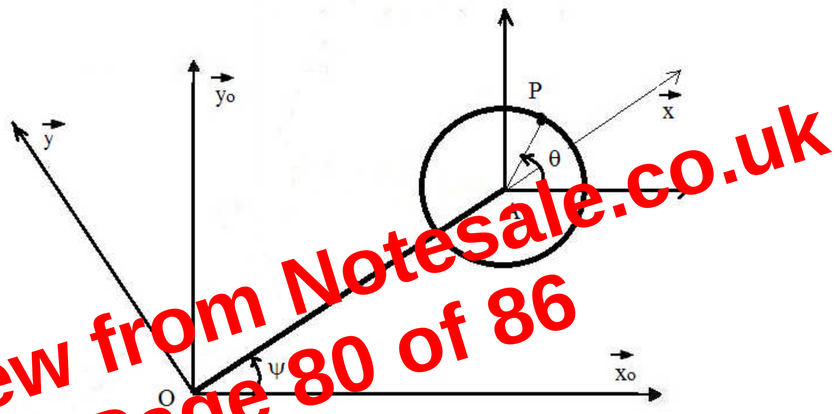
a) Déterminer $\vec{U}(P)$ où P est un point de coordonnées (x, y, z)

Exercice.5

Un solide parfait **S** est constitué de deux parties collées : Un disque $\mathbf{S_1}$ de centre **O**, de rayon **R** et de masse **m**, et un disque $\mathbf{S_2}$ de centre **C** (OC=a), de rayon **R/4** et de même masse **m** (fig.2).

Le solide **S** tourne à la vitesse angulaire **ω** autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$ du repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au solide **S**.

1) Déterminer la position du centre de masse **G** du solide **S**.
2) Calculer la matrice d'inertie en O du solide S en appliquant le théorème de Koenig. En déduire son moment d'inertie $\mathbf{I_{ZZ}}$ par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_0)$.
3) Calculer le moment cinétique en **O** du solide **S.**
4) Retrouver $\mathbf{I_{ZZ}}$ du solide **S** en appliquant le théorème de Huygens.
5) Calculer le moment cinétique en **G** du solide **S.**
6) Calculer le moment d'inertie I_{GZ} du solide S par rapport à l'axe $(G, \vec{z}_0)$ appliquant le théorème de Huygens
7) Calculer l'énergie cinétique $\mathbf{E_C(S/R_0)}$ du solide **S.**



Preview from Notesale.co.uk
Page 80 of 86

Fig.1

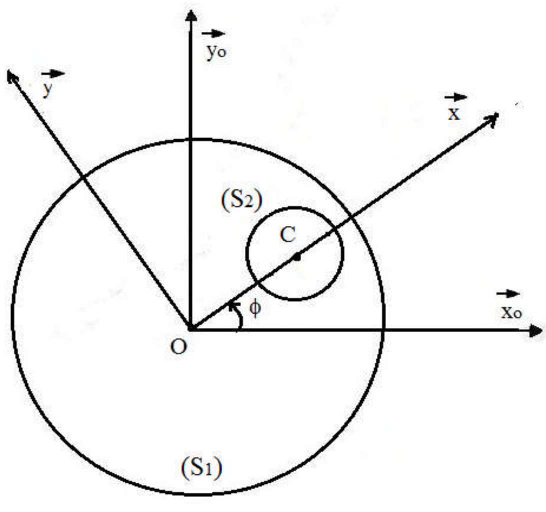


Fig.2

La réaction du bâti en O se limite à une force unique $\vec{R}$ et le cône (S) est dans le champ constant de la pesanteur (de densité massique d'efforts $-g\,\vec{z}_o$).

Les résultats seront exprimés dans la base ($\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}$) .

1) Calculer les vecteurs vitesse et accélération $\vec{V}(A/R_o)$ et $\vec{\gamma}(A/R_o)$.
2) Calculer le moment cinétique en O du cône (S) par rapport à R_o
3) Déterminer l'énergie cinétique du cône (S) par rapport R_o
4) a) Faire l'analyse des forces s'exerçant sur le cône (S).

   b) Calculer le moment en O de ces forces, $\vec{M}_o(\sum\vec{F})$.

   c) Calculer la puissance développée par ces efforts.

5) a) Peut-on écrire l'intégrale première de l'énergie ? S'il y a lieu, l'expliciter.

   b) A partir du théorème du moment cinétique, appliqué au cône (S) en O, trouver deux intégrales premières.

   c) Montrer que l'équation régissant la variation de θ se ramène à une équation de la forme $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$ que l'on écrira explicitement.

6) Déterminer la réaction du bâti $\vec{R}$.

7) A quelles conditions peut-il se produire des mouvements au cours desquels la tige reste horizontale ?

8) Le cône étant plein et homogène, calculer A et C .

Preview from Notesale.co.uk
Page 83 of 86

__Problème.2__

Un solide de révolution S, homogène et plein, est constitué par un hémisphère et un cylindre de même base. On désigne par a le rayon de cette base et H son centre. On note m la masse de S, G son centre d'inertie qu'on repère dans S par $\overrightarrow{HG} = h\,\vec{z}$ (fig.2), A et C ses moments principaux d'inertie en G [C moment d'inertie relatif à $(G, \vec{z})$]. S est en contact, par sa partie hémisphérique uniquement, en un point I avec un plan horizontal (∏) auquel est lié le repère $R_o(O, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$, $\vec{z}_o$ vertical ascendant et du côté de S [c.à.d. $\overrightarrow{OG}.\vec{z}_o > 0$]. Le repère $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ orthonormé direct est lié à S. On repère la position de S dans R_o par les angles d'Euler habituels ψ, θ, ϕ et par les coordonnées x et y dans R_o de la projection orthogonale de G sur (Π). On note $\vec{z}_o \wedge \vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{z} \wedge \vec{u} = \vec{w}$ avec $\psi = (\vec{x}_o, \vec{u})$.