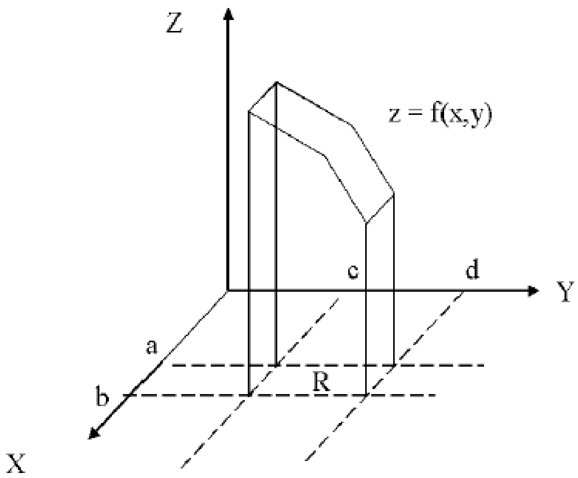
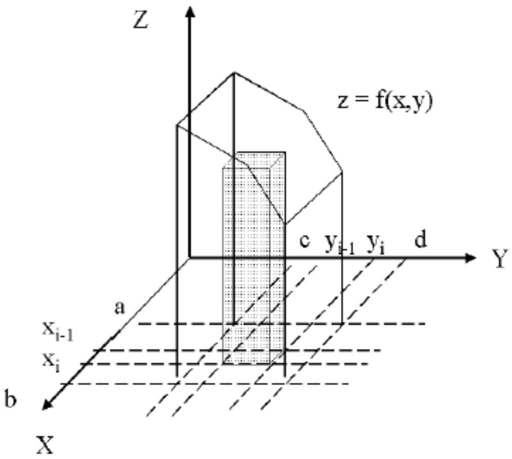
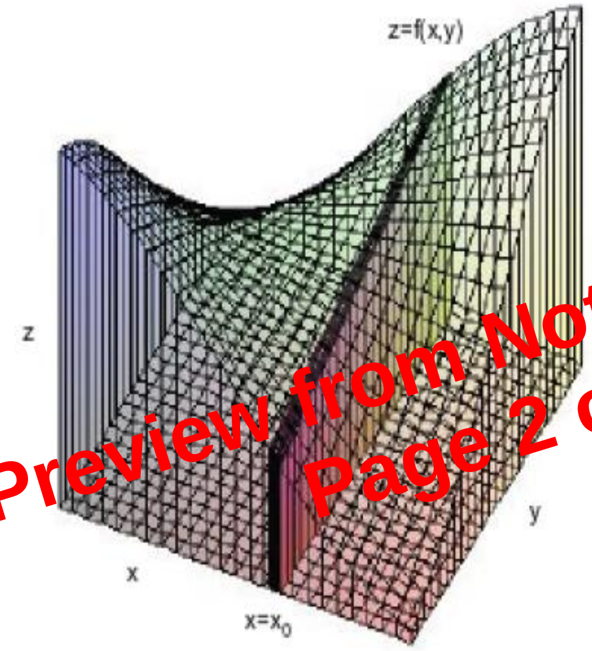




On partage D en sous-rectangles, dans chaque sous-rectangle$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ on choisit un point M(x,y) et on calcule l'image de (x,y) pour la fonction f.



La somme des volumes des colonnes dont la base est des sous-rectangles et la hauteur f(x,y) est une approximation du volume compris entre le plan Z=0 et la surface S. Lorsque le quadrillage devient suffisamment « fin » pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, ce volume sera la limite des sommes de Riemann et on le note

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1\le i\le n;1\le j\le n} f(a+i\frac{b-a}{n}, c+j\frac{d-c}{n})$$

Exemple : En utilisant la définition, calculer $\iint_{[0,1]\times[0,1]}(x+2y)dx\,dy$

Remarques :

- A priori, l'intégrale double est faite pour calculer des volumes, de même que l'intégrale simple était faite pour calculer une aire.
- Dans une intégrale double, les bornes en x et y doivent toujours être rangées en ordre croissant.

Théorème : *Soit D un domaine borné de* $\mathbb{R}^2$*.Alors toute fonction continue* $f: D \to \mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Riemann.*

3. **Volume :** Le volume d'un corps est donné par $V = \iiint_D \; dx\,dy\,dz$tel que D est le domaine délimité par ce corps.

Exemple : Calculer le volume d'une sphère.

$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} dx\,dy\,dz$, d'après la propriété de la symétrie :

$V = 8\iiint_D \; dxdydz \; avec \; D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2 ; x \ge 0, y \ge 0 \; etz \ge 0\}$ d'où

$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^R r^2\,dr = \frac{4\pi}{3}R^3$

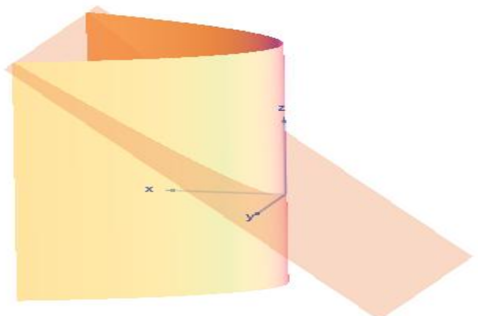
4. **Masse, centre et moments d'inertie :** Soit µ la densité d'un solide qui occupe la région V , alors sa masse est donnée par

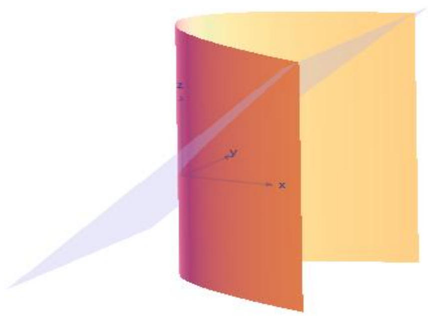
$$M = \iiint_V \; \mu(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

Le centre de masse G est de coordonnées $\begin{cases} x_G = \frac{1}{M}\iiint_V \; x\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz \\ y_G = \frac{1}{M}\iiint_V \; y\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz \\ z_G = \frac{1}{M}\iiint_V \; z\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz \end{cases}$

Les moments d'inertie par rapport aux trois axes sont : $\begin{cases} I_x = \iiint_V \; (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz \\ I_y = \iiint_V \; (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz \\ I_z = \iiint_V \; (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dx\,dy\,dz \end{cases}$

Exemple : Déterminer le centre de masse d'un solide de densité constante, borné par le cylindre parabolique $x = y^2$ et les plans x=z, z=0 et x=1.





La masse est $= \int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{1}\left(\int_0^x \mu dz\right)dx\right)dy = \frac{4\mu}{5}$, en raison de symétrie du domaine et μ par rapport au plan OXZ, on a $y_G = 0$. Et $x_G = \frac{1}{M}\iiint_V \; x\mu\,dx\,dy\,dz = \frac{\mu}{M}\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{1}\left(\int_0^x xdz\right)dx\right)dy = \frac{5}{7}$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_V \; z\mu dx\,dy\,dz = \frac{\mu}{M}\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2}^{1}\left(\int_0^x zdz\right)dx\right)dy = \frac{5}{14}$$