تمرين نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب:

$$u_0=\frac{3}{2} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=\frac{{u_n}^2+u_n}{{u_n}^2+1}$$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n \succ 1$

2) أدرس رتابة (u_n) و استنتج أن (u_n) متقاربة

3) أ – بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\prec u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$

ب – استنتج : $(\forall n\in\mathbb{N}): 0\prec u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ثم أحسب $\lim u_n$

تمرين: نعتبر المتتالية (u_n) حيث $\begin{cases}u_0=10\\ u_{n+1}=\frac{5u_n}{n+1}\end{cases}$

بين أن $\forall n\ge 10 \quad 0\le\frac{u_{n+1}}{u_n}\prec\frac{1}{2}$ ثم حدد $\lim u_n$

IV- خاصيات

خاصية كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

خاصية إذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين نهايتها l و l' بحيث $u_n\le v_n$ لكل $n\ge N$ فان $l\le l'$

مبرهنة كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

ملاحظة كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية معرفة بـ $u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+.....+\frac{1}{n^2}$

1- بين أن $(u_n)_{n\ge1}$ تزايدية

2- بين أن $\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\} \quad \frac{1}{k^2}\prec\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ ثم بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n\prec 2$

3- استنتج أن $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة.

V- العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

1- مبرهنة

(u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و α عدد حقيقي

$$\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n \qquad \lim(u_nv_n)=\lim u_n\times\lim v_n \qquad \lim(\alpha u_n)=\alpha\lim u_n$$

إذا كان $\lim v_n\neq 0$ فان $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

Preview from Notesale.co.uk
Page 4 of 5

العمليات على النهايات

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n+v_n)$	$\lim(u_n\times v_n)$	$\lim\frac{u_n}{v_n}$
l	l'	$l+l'$	$l\times l'$	$(l'\neq 0)\ \frac{l}{l'}$
$l\neq 0$ l	$+\infty$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	0
$l\neq 0$ l	$-\infty$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	0
l حيث $l\neq 0$	0^+	l	0	∞ مع وضع إشارة l
l حيث $l\neq 0$	0^-	l	0	∞ مع وضع عكس إشارة l
0	0	0	0	شكل غير محدد
0	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	0
0	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	l حيث $l\neq 0$	$+\infty$	∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l
$-\infty$	l حيث $l\neq 0$	$-\infty$	∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l