

تمرين نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة ب:

$$u_0 = \frac{3}{2} ; (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$$

(1) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$

(2) أدرس رتبة (u_n) واستنتج أن (u_n) متقاربة

(3) أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب- استنتج : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ثم أحسب $\lim u_n$

تمرين: نعتبر المتتالية (u_n) حيث $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{n+1} \end{cases}$

بين أن $(\forall n \geq 10) \quad 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$ ثم حدد $\lim u_n$

IV- خاصيات

خاصية كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

خاصية إذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين نهايتها l و l' بحيث $u_n \leq v_n$ لكل $n \geq N$ فإن $l \leq l'$

مبرهنة

كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

ملاحظة

كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

تمرين: نعتبر $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة بـ $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$

1- بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية

2- بين أن $(\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ثم بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < 2$

3- استنتج أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة.

V- العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

1- مبرهنة

(u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و α عدد حقيقي

$$\lim(\alpha u_n) = \alpha \lim u_n \quad \lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n \quad \lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

إذا كان $\lim v_n \neq 0$ فإن $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

العمليات على النهايات

$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\lim(u_n v_n)$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim v_n$	$\lim u_n$
$(l' \neq 0) \frac{l}{l'}$	$l \times l'$	$l + l'$	l'	l
0	∞ مع وضع إشارة l	$+\infty$	$+\infty$	$l \neq 0$
0	∞ مع وضع عكس إشارة l	$-\infty$	$-\infty$	$l \neq 0$
∞ مع وضع إشارة l	0	l	0^+	$l \neq 0$ حيث l
∞ مع وضع عكس إشارة l	0	l	0^-	$l \neq 0$ حيث l
شكل غير محدد	0	0	0	0
0	شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	0
0	شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞ مع وضع إشارة l	∞ مع وضع إشارة l	$+\infty$	l حيث $l \neq 0$	$+\infty$
∞ مع وضع عكس إشارة l	∞ مع وضع عكس إشارة l	$-\infty$	l حيث $l \neq 0$	$-\infty$